Oberlin College Library
Not to be Drawn

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 17. 1. September 1917. 18. Jahrgang.
Redaktionsschluß für No. 18 am 27. August 1917.

INHALT:

Originalmitteilungen:
H. Lichte, Energieabsorption in Schallantennen. S. 393.
R. Fürth, Über die Entropie eines realen Gases als Funktion der mittleren räumlichen Temperatur- und Dichteverteilung. S. 395.
A. Haas, Der positive Kern der Atome. S. 400.
C. Dieterici, Zur Bestimmung der Horizontalintensität des Erdmagnetismus. Ein Lokalvariometer. S. 402.
Zusammenfassende Bearbeitungen:
E. Wagner, Über Röntgenspektroskopie. S. 405.
Besprechungen:
St. Meyer u. E. v. Schweidler, Radioaktivität. S. 420.
Tagesereignisse. S. 420.
Personalien. S. 420.
Angebote. S. 420.
Gesuche. S. 420.

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Energieabsorption in Schallantennen.

Von H. Lichte.

Kürzlich ist gezeigt worden[1]), daß zwischen akustischen und elektrischen Feldern und Antennen eine weitgehende Analogie besteht. Im Anschluß an Rayleigh[2]) werden in obiger Arbeit die Strahlungskörper nullter und erster Ordnung behandelt und aus den Druck- bzw. Kraftgleichungen die schwingenden Massen und Dämpfungen akustischer Systeme bestimmt.

Im folgenden sollen die Verhältnisse bei der Energieabsorption in Schallantennen, und zwar Strahlern nullter Ordnung, die sich in einem Schallfelde befinden, näher beleuchtet werden. (Die Behandlung der Strahler erster Ordnung ist einer späteren Arbeit vorbehalten.)

Für Antennen der drahtlosen Telegraphie sind diese Verhältnisse bereits von Rüdenberg[3]) untersucht worden. Die Art der Behandlung des Problems ist hier ganz analog. Um die Vorstellung zu fixieren, sei ein bestimmtes Beispiel gewählt: Die Kolbenmembran[4]) von der Größe $2F$ im freien Medium.

Bedeuten:

m die Masse der Membran,
σ die Dichte des Mediums,
R der Radius der Membran,
ξ die Amplitude der Membran,
$\dot{\xi}$, $\ddot{\xi}$ die zeitlichen Ableitungen von ξ,
a die Schallgeschwindigkeit in dem Medium, in dem sich die Antenne befindet,
λ die Wellenlänge,
μ die Restitutionskraft,
P der Schalldruck,
w_r der akustische Bremswiderstand,

so ist die vollständige Schwingungsgleichung des Resonators

$$M\ddot{\xi}+\left(w_r+\frac{a\sigma\pi}{2}\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 R^4\right)\dot{\xi}+\mu\xi=2PR^2\pi. \tag{1}$$

Hier ist

$$M=m+\frac{8\sigma R^3}{3} \tag{2}$$

die gesamte schwingende Masse.

Vorausgesetzt ist, daß die Dimensionen des Resonators klein sind zur Wellenlänge.

Man kann die Gleichung auch aus dem Energieprinzip ableiten. Es ist nämlich die kinetische Energie des Systems

$$V=\frac{1}{2}M\cdot\dot{\xi}^2, \tag{3}$$

die potentielle Energie

$$T=\frac{1}{2}\mu\xi^2, \tag{4}$$

mithin die gesamte innere Energie

$$U=\frac{1}{2}M\dot{\xi}^2+\frac{1}{2}\mu\xi^2, \tag{5}$$

und deren sekundliche Änderung

$$\frac{\partial U}{\partial t}=M\dot{\xi}\ddot{\xi}+\mu\xi\dot{\xi}. \tag{6}$$

Diese wird bewirkt durch die in der Schallantenne akustisch abgebremste Leistung L_a, sowie die den auffallenden Wellen entnommene und die durch Rückstrahlung auf das Feld abgegebene Leistung L_e bzw. L_a.

Diese Leistungen sind:

$$L_a=w_r\dot{\xi}^2, \tag{7}$$
$$L_e=2PR^2\pi\cdot\dot{\xi}, \tag{8}$$
$$L_a=\frac{a\sigma\pi}{2}\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2\cdot R^4\cdot\dot{\xi}^2. \tag{9}$$

---

1) W. Hahnemann u. H. Hecht, diese Zeitschr. 17, 601—609, 1916; 18, 261—270, 1917.
2) Rayleigh, Theorie des Schalles. — Deutsche Ausgabe von Neesen. Braunschweig 1880.
3) Rüdenberg, Ann. d. Phys. (4) 25, 446—466, 1908.
4) Hahnemann u. Hecht, diese Zeitschr. 18, 263, 1917; Rayleigh, Bd. II, S. 193—204.

Es muß also sein

$$\frac{\partial U}{\partial t} = L_e - L_n - L_a, \tag{10}$$

oder

$$M\ddot{\xi}\dot{\xi} + \mu\dot{\xi}\dot{\xi} - 2PR^2\pi\dot{\xi} + w_v\dot{\xi}^2 + w_\Sigma\cdot\dot{\xi}^2 = 0, \tag{11}$$

wo

$$w_\Sigma = \frac{a\sigma\pi}{2}\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2\cdot R^4 \tag{12}$$

gesetzt ist.

Aus (11) folgt durch Division mit $\dot{\xi}$ Gleichung (1).

Setzt man

$$\frac{w_v + w_\Sigma}{M} = 2(\delta_v + \delta_\Sigma) = 2\delta \tag{13}$$

und

$$\frac{\mu}{M} = \omega_0^2, \tag{14}$$

wo δ der Dämpfungsfaktor (δ_v der Nutzdämpfungsfaktor, δ_Σ der Strahlungsdämpfungsfaktor) und ω_0 die Eigenfrequenz des Resonators bedeuten, so nimmt (1) die einfachere Form an

$$\ddot{\xi} + 2\delta\dot{\xi} + \omega_0^2\,\xi = \frac{2FP}{M}. \tag{15}$$

Im Falle ungedämpfter Wellenzüge ist:

$$P = P_0\sin\omega t. \tag{16}$$

Die Lösung von (15) lautet dann

$$\xi = A\sin(\omega t - \Theta), \tag{17}$$

wo

$$\Theta = \operatorname{arctg}\frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \tag{18}$$

und

$$A = \frac{2FP_0}{M[(\omega_0^2-\omega^2)^2\cos\Theta + 2\delta\omega\sin\Theta]} \tag{19a}$$

$$= \frac{2FP_0\sin\Theta}{M\cdot 2\delta\omega} \tag{19b}$$

$$= \frac{2FP_0}{M\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}}. \tag{19c}$$

Also ist

$$\xi = \frac{2FP_0}{M\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}}\sin(\omega t - \Theta) \tag{20}$$

und

$$\dot{\xi} = \frac{2FP_0\omega}{M\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}}\cos(\omega t - \Theta). \tag{21}$$

Die aufgenommene Nutzenergie ist im zeitlichen Mittel

$$L_n = \frac{1}{2}\left(\frac{2FP_0}{M}\right)^2\cdot\frac{w_v\cdot\omega^2}{[(\omega_0^2-\omega^2]^2 + 4\delta^2\omega^2}. \tag{22}$$

Für die ausgestrahlte Energie erhält man

$$L_a = \frac{R^4\pi^2P_0^2}{M^2}\cdot\frac{a\sigma\pi\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2\cdot R^4\cdot\omega^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2} = \\ = L_n\cdot\frac{2a\sigma\pi\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2R^4}{w_v}, \tag{23}$$

und endlich für die eingestrahlte Energie

$$L_e = \frac{\frac{1}{2}(2FP_0)^2\omega}{M\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}}. \tag{24}$$

Im Resonanzfall ist

$$\xi = \frac{2FP_0}{M\cdot 2\delta\omega}\sin(\omega t - \Theta) = \\ = \frac{2FP_0}{(w_v + w_\Sigma)\omega}\sin(\omega t - \Theta) \tag{25}$$

und

$$\dot{\xi} = \frac{2FP_0}{M\cdot 2\delta}\cos(\omega t - \Theta) = \\ = \frac{2FP_0}{(w_v + w_\Sigma)}\cos(\omega t - \Theta). \tag{26}$$

Die nutzbar absorbierte Energie ist

$$L_n = \frac{1}{2}\left(\frac{2FP_0}{M}\right)^2\frac{w_v}{4\delta^2} = \\ = \frac{1}{2}2FP_0)^2\cdot\frac{w_v}{(w_v+w_\Sigma)^2} = \\ = \frac{1}{2}(2FP_0)^2\cdot\frac{\delta_v}{M\cdot 2\cdot(\delta_v+\delta_\Sigma)^2}. \tag{27}$$

Man sieht, sie ist abhängig von der Nutzdämpfung. Ihr Maximum wird erreicht, wenn

$$\frac{\partial L_n}{\partial\delta_v} = 0 \tag{28}$$

oder

$$\delta_v = \delta_\Sigma, \tag{29}$$

also die Nutzdämpfung gleich der Strahlungsdämpfung ist, wie das beim Empfang elektrischer Wellen auch der Fall ist.

Es kann maximal die Energie absorbiert werden

$$L_{n\max} = \frac{1}{2}(2R^2\pi P_0)^2\cdot\frac{1}{4w_\Sigma}, \tag{30a}$$

$$= \frac{1}{4}\cdot P_0^2\cdot\frac{1}{a\sigma\pi}\cdot\lambda^2. \tag{30b}$$

Sie ist um so größer, je größer die Wellenlänge, aber unabhängig von der Größe des Resonators.

Um den Einfluß des Resonators im akustischen Strahlungsfelde festzustellen, ist das Eigenfeld des Resonators zu bestimmen.

Nach Rayleigh[1]) ist das Geschwindigkeitspotential eines Zuges von harmonischen Wellen, welche kontinuierlich nach außen von einer Schallquelle forteilen,

$$\varphi = -\frac{B}{4\pi r}\cos\frac{2\pi}{\lambda}(at-r), \qquad (31)$$

wo B den Maximalwert des durch den schwingenden Resonator erzeugten Mediumstromes bedeutet.

Im vorliegenden Falle ist

$$B = \pi \cdot n \cdot 2F \cdot \xi, \qquad (32)$$

also

$$\varphi = -\frac{\omega F \cdot \xi}{4\pi r}\cos\frac{2\pi}{\lambda}(at-r), \qquad (33a)$$

$$= \frac{2F^2 P_0 \cdot \omega}{4\pi r \cdot M\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\delta^2\omega^2}}\cos\frac{2\pi}{\lambda}(at-r). \qquad (33b)$$

Im ungestörten primären Feld ist das Potential

$$\psi = -\frac{P_0}{\omega\sigma}\cos\omega t. \qquad (34)$$

Man erhält also für das Amplitudenverhältnis von sekundärer zu primärer Welle

$$\alpha = \frac{2F^2\omega^2\sigma}{4\pi r M\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\delta^2\omega^2}}, \qquad (35)$$

was im Resonanzfalle das Maximum

$$\alpha_{\max} = \frac{F^2\omega\sigma}{4\pi r M\delta} \qquad (36)$$

erreicht. Bei kleiner Nutzdämpfung ist

$$\alpha = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\lambda}{r}, \qquad (37)$$

also nur von dem Verhältnis $\frac{\lambda}{r}$ abhängig.

Rechnet man den Störungsbereich so weit, daß an seiner Grenze das primäre Feld nur noch um 1 Proz. gestört wird, so ist

$$\alpha = \frac{1}{100} = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\lambda}{r_s}, \qquad (38)$$

mithin

$$r_s = \frac{100}{2\pi}\cdot\lambda = 16\,\lambda. \qquad (39)$$

Die Rückwirkung des Resonators auf das Feld kann sich auf eine Strecke von etwa 16 Wellenlängen bemerkbar machen. Bei stärkerer Energieabsorption aus dem Felde ist der Störungsradius halb so groß.

Hiernach müssen zwei gleiche Resonatoren, wenn sie sich bei stärkster Energieabsorption aus dem Felde weniger als 20 Proz. stören sollen, 1,6 λ voneinander entfernt sein.

Endlich sei noch die vom Resonator nutzbar absorbierte Energie mit dem Energiestrom verglichen, der durch eine bestimmte Fläche im ungestörten Strahlungsfelde wandert.

Die Intensität der ungestörten Welle ist

$$L = \frac{P_0^2}{2\sigma a}\ ^1), \qquad (40)$$

während die nutzbar absorbierte Energie durch (22) gegeben ist.

Beide Leistungen sind gleich für eine Fläche

$$Q = \frac{L_n}{L} = \frac{(2F)^2}{M}\cdot\frac{w_r\omega^2\cdot\sigma a}{[\omega_0^2-\omega^2)^2+4\delta^2\omega^2}. \qquad (41)$$

Im Falle der Resonanz und gleicher Strahlungs- und Nutzdämpfung wird

$$Q = \frac{\lambda^2}{2\pi}, \qquad (42)$$

und man erhält als größten Radius der kreisförmigen Absorptionsfläche

$$r_a = \frac{\lambda}{\sqrt{2\pi}}, \quad = 0{,}225\,\lambda. \qquad (43)$$

Zusammenfassung.

1. Es wird die von einem in einem Schallfelde befindlichen Nullstrahler absorbierte Energie bestimmt. Sie ist proportional dem Quadrat der Wellenlänge.

2. Es wird die Störung des primären durch das sekundäre Feld als proportional zu $\frac{\lambda}{r}$ bestimmt. Eine Rückwirkung des Resonators von 1 Proz. kann sich noch auf eine Strecke von 16 λ bemerkbar machen.

3. Es wird die Größe der Absorptionsfläche bestimmt.

4. Die für den akustischen Nullstrahler gefundenen Ergebnisse stimmen qualitativ mit denen für die Antennen der drahtlosen Telegraphie überein.

1) Rayleigh, Bd. II, S. 128.

1) Hahnemann u. Hecht, l. c.

Kiel, den 15. Juli 1917.

(Eingegangen 23. Juli 1917.)

Über die Entropie eines realen Gases als Funktion der mittleren räumlichen Temperatur- und Dichteverteilung.

Von R. Fürth.

Ph. Frank hat in einer Abhandlung[1]) gezeigt, daß sich die Entropie eines idealen Gases

1) Ph. Frank, Die Entropie als Maß für die Gleichförmigkeit der Temperatur- und Dichteverteilung. „Lotos". Naturwissenschaftliche Zeitschrift, Prag **64**, 1916.

als Maß für die Gleichförmigkeit der Temperatur- und Dichteverteilung auffassen läßt und auch analytisch so darstellbar ist. Er bekommt für die Entropie S eines Mols des Gases folgende Formel

$$S = S_0 - \frac{1}{2}\left[C\left(\frac{T-T_0}{T_0}\right)^2 + R\left(\frac{\overline{s-s_0}}{s_0}\right)^2\right], \quad (1)$$

worin die eingeführten Größen bedeuten: S_0 die Entropie im Normalzustande, C die spezifische Wärme bei konstantem Volumen, R die absolute Gaskonstante, T und s die Temperatur und Dichte eines Volumelements des Gases, T_0 und s_0 die räumlichen Mittelwerte dieser Größen. Die Querstriche bedeuten ebenfalls räumliche Mittelbildung über alle Volumelemente. Die Formel zeigt, daß die Entropie dann ihr Maximum hat, wenn die Temperatur und Dichte gleichmäßig über die Volumelemente des Gases verteilt sind und daß sich daher nach dem zweiten Hauptsatze dieser Zustand automatisch herstellen muß.

Die an diesem Spezialfall angewandte Methode legt es nahe, eine ähnliche Formel für die Entropie bei einem realen Gase unter Zugrundelegung einer anderen Zustandsgleichung als der Boyle-Charlesschen zu suchen und zu schauen, wie sich da die Entropie durch die Temperatur- und Dichteverteilung ausdrückt. Das soll nun im folgenden versucht und der so abgeleitete Entropieausdruck verwendet werden, um mit Hilfe des Boltzmannschen Theorems die seinerzeit von M. v. Smoluchowski[1]) abgeleitete Formel für die mittlere Dichteschwankung eines Gases in der Nähe des kritischen Zustandes daraus auf anderem Wege zu gewinnen.

§ 1. Ableitung der Entropieformel für ein reales Gas.

Definitionsgemäß ist die Entropie eines homogenen Systems gegeben durch folgende Formel

$$S = \int \frac{du + p\,dv}{T}, \quad (2)$$

wo u die innere Energie, p den Druck, v das spezifische Volumen, T die absolute Temperatur bedeuten.

Wir denken uns zunächst eine gleichmäßige Temperatur- und Dichteverteilung in dem Gase, das der van der Waalschen Zustandsgleichung genügen soll

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v-b) = RT, \quad (3)$$

wo a, b und R die charakteristischen Konstanten des Gases sind.

1) M. v. Smoluchowski, Ann. d. Phys. **25**, 295 ff., 1908.

Um einen Ausdruck für die innere Energie zu bekommen, gebrauchen wir den in der Thermodynamik aus dem zweiten Hauptsatz abgeleiteten Ansatz[1])

$$\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T = T\frac{\partial p}{\partial T} - p$$
$$\left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_v = C, \quad (4)$$

wo die Differentiation das erstemal bei konstantem T, das zweitemal bei konstantem v vorzunehmen ist. Daraus ergibt sich:

$$du = \left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T dv + \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_v dT. \quad (5)$$

Für den Fall der Zustandsgleichung (3) ergibt sich aus (4) und (5)

$$du = \frac{a}{v^2}dv + C\,dT \quad (6)$$

und integriert (bis auf eine unwesentliche Konstante)

$$u = -\frac{a}{v} + CT. \quad (6')$$

Aus (2) und (6) folgt nun

$$S = \int \frac{C}{T}dT + \int \frac{R}{v-b}dv$$
$$= C\log T + R\log(v-b) + \text{const} \quad (7)$$

für die Entropie eines Mols des Gases.

Wir lassen nun die Annahme der gleichmäßigen Temperatur- und Dichteverteilung fallen, wollen aber voraussetzen, daß die räumliche Verteilung dieser Größen eine solche ist, daß Temperatur und Dichte benachbarter Volumelemente des Gases nur wenig voneinander verschieden sein sollen (so daß das Quadrat ihres Gradienten sich vernachlässigen läßt). Ferner machen wir die Voraussetzung, daß innerhalb eines genügend kleinen Volumelements Temperatur und Dichte als konstant angesehen werden können[2]). Schließlich sollen die Abweichungen von Temperatur und Dichte vom Normalzustande der Gleichverteilung so wenig abweichen, daß man bei ihrer Entwicklung Glieder von höherer als der zweiten Ordnung vernachlässigen kann.

Unter diesen Voraussetzungen wollen wir die Entropie des Gases berechnen als Summe der Entropien aller Volumelemente. Gegen die Zulässigkeit dieser Berechnungsart läßt sich nun allerdings ein Einwand erheben, den Herr v. Smoluchowski so freundlich war, in einem

1) O. D. Chwolson, Lehrbuch der Physik. Braunschweig, **3**, 510, 1905.

2) Nach unten ergibt sich die Grenze für die Verkleinerung der Volumelemente, indem ja in jedem einzelnen so viel Moleküle enthalten sein müssen, daß daselbst eine Temperatur definiert ist.

Briefe an Herrn Ph. Frank mitzuteilen, in dem es unter anderem heißt:

„Ich glaube, man könnte den Einwand formulieren: Die Entropie des Gases ist eine Funktion der Mikroverteilung, aber nicht der Makroverteilung. Im Falle des Gleichgewichts läßt sie sich allerdings als Funktion von v und T ausdrücken, weil da gewisse statistische Beziehungen zwischen den Mikrovariabeln statthaben, aber das geht nicht allgemein. Er wäre eine unendliche Mannigfaltigkeit von Systemen denkbar, welche identische v, T-Verteilung, aber verschiedene Entropiewerte haben. Nimmt man hiervon diejenigen deren Entropie mit der aus dem Gleichgewichtszustand der einzelnen Elemente berechneten übereinstimmt, so trifft man eine willkürliche Auswahl."

Dieser Einwand, der vollkommen richtig ist, hat aber doch, wie ich glaube, auf die Anwendbarkeit dieser Überlegungen auf unseren Fall keinen wesentlichen Einfluß, da ja gemäß den gemachten Voraussetzungen sich das Gas tatsächlich in einem solchen Zustand der Temperatur- und Dichteverteilung befindet, daß sich die Gesamtentropie als Summe der Entropien der einzelnen Volumelemente ergibt.

Nun wird allerdings das Gas im Laufe der Zeit Zustände annehmen, die von der normalen Maxwellschen Geschwindigkeitsverteilung beliebig weit abweichen und auf die sich dann die Überlegung nicht anwenden läßt, aber, wie aus der kinetischen Gastheorie bekannt, ist die Wahrscheinlichkeit der Maxwellschen Verteilung außerordentlich überwiegend, so daß die von ihr stark abweichenden Verteilungen gegen sie fast völlig verschwinden, da ja die tatsächlich beobachtbaren Dichte- und Temperaturschwankungen nur zeitliche Mittelwerte darstellen. Wenn also auch im Laufe der Zeit Zustände eintreten, wo die Entropie tatsächlich einen anderen Wert hat, als unsere Formeln ihn berechnen, so sind diese doch so selten, daß sie nicht in Betracht gezogen werden müssen.

Damit scheint mir das hier eingeschlagene Verfahren gerechtfertigt, das sich durch eine besondere Anschaulichkeit auszeichnet und außer dem Boltzmannschen Prinzip keinerlei kinetische Betrachtungen erfordert. Nun wollen wir uns wieder der eigentlichen Rechnung zuwenden. Bezeichnen wir mit S die Entropie des ganzen Gases mit dem Volumen V und mit S_0 die bei gleichmäßiger Temperatur- und Dichteverteilung bestehende normale, so erhält man durch Integration über alle Volumelemente $d\omega$

$$S - S_0 = \int \Big[C (s \log T - s_0 \log T_0) + R \left(s \log \left(\frac{1}{s} - b\right) - s_0 \log \left(\frac{1}{s_0} - b\right)\right)\Big] d\omega \tag{8}$$

wenn man unter s bzw. s_0 die Dichte versteht, die mit v verknüpft ist durch

$$vs = 1 . \tag{9}$$

Wir setzen nun

$$s = s_0 + \sigma , \quad T = T_0 + \tau , \tag{10}$$

wo laut Voraussetzung höhere als die zweiten Potenzen von $\frac{\sigma}{s_0}$ und $\frac{\tau}{T_0}$ sich gegen 1 vernachlässigen lassen.

Da das Gas nach außen hin als abgeschlossen gedacht ist, müssen die beiden Bedingungen über die Konstanz der Masse und der Energie erfüllt sein, nämlich

$$\int s\, d\omega = \int s_0\, d\omega = 1 , \tag{11}$$

woraus sich ergibt

$$\int \sigma\, d\omega = 0 \tag{11'}$$

und ferner

$$\int s u\, d\omega = \int s (C T - a s) d\omega = s_0 (C T_0 - a s_0) d\omega = s_0 (C T_0 - a s_0) V . \tag{12}$$

Setzt man hier für s und T aus (10) ein, so ergibt sich unter Berücksichtigung von (11')

$$s_0 C \int \tau\, d\omega - a \int \sigma^2 d\omega + C \int \sigma \tau\, d\omega = 0 . \tag{12'}$$

Ferner resultiert durch Einsetzung aus (10) und Entwicklung von $\log T$ nach Potenzen von $\frac{\tau}{T_0}$, sowie der erwähnten Vernachlässigung

$$\int C (s \log T - s_0 \log T_0) d\omega = \int C \left(s_0 \frac{\tau}{T_0} - \frac{s_0}{2} \frac{\tau^2}{T_0^2} + \sigma \log T_0 + \frac{\sigma \tau}{T_0} \right) d\omega . \tag{13}$$

Unter Berücksichtigung von (11') und (12') folgt daraus weiter

$$\begin{aligned} \int C (s \log T - s_0 \log T_0) d\omega &= \frac{a}{T_0} \int \sigma^2 d\omega - \frac{C s_0}{2 T_0^2} \int \tau^2 d\omega \\ &= \frac{a}{T_0} \int \sigma^2 d\omega - \frac{C}{2 V} \int \left(\frac{\tau}{T_0}\right)^2 d\omega \end{aligned} \tag{14}$$

für den ersten Term des Ausdruckes (8).

Um nun auch den zweiten Term von (8) zu finden, entwickeln wir $\log (1/s - b)$ nach Potenzen von $\frac{\sigma}{s_0}$, wobei wir beachten, daß jedenfalls

$$b \ll v$$

also $\frac{\sigma}{\frac{1}{b} - s_0}$ eine kleine Größe ist.

Es ergibt sich

$$\begin{aligned} \log \left(\frac{1}{s} - b\right) &= -\log s + \log (1 - b s) = -\log s_0 \\ &- \frac{\sigma}{s_0} + \frac{\sigma^2}{2 s_0^2} + \log (1 - b s_0) - \frac{b \sigma}{1 - b s_0} - \\ &- \frac{b^2 \sigma^2}{2 (1 - b s_0)^2} = -\log s_0 + \log (1 - b s_0) \\ &- \frac{\sigma}{s_0 (1 - b s_0)} + \frac{\sigma^2}{2 s_0^2} \frac{1 - 2 b s_0}{(1 - b s_0)^2} \end{aligned} \tag{15}$$

und weiter

$$s\log\left(\frac{1}{s}-b\right)-s_0\log\left(\frac{1}{s_0}-b\right)=\sigma\log\left(\frac{1}{s_0}-b\right)$$
$$-\frac{\sigma}{1-bs_0}-\frac{\sigma^2}{s_0(1-bs_0)}+\frac{\sigma^2}{2s_0}\frac{1-2bs_0}{(1-bs_0)^2}. \qquad (15')$$

Und daher folgt für den zweiten Term von (8) unter Berücksichtigung von (11')

$$\int R\left[s\log\left(\frac{1}{s}-b\right)-s_0\log\left(\frac{1}{s_0}-b\right)\right]d\omega=$$
$$-\frac{R}{V}\frac{1}{2(1-bs_0)^2}\int\left(\frac{\sigma}{s_0}\right)^2 d\omega\,. \qquad (16)$$

Aus (14) und (16) folgt schließlich für (8)

$$S-S_0=-\frac{1}{2V}\int\left[C\left(\frac{\tau}{T_0}\right)^2\right.$$
$$\left.+\left(\frac{R}{(1-bs_0)^2}-\frac{2a}{T_0V}\right)\left(\frac{\sigma}{s_0}\right)^2\right]d\omega= \qquad (8a)$$
$$-\frac{1}{2}\left[C\overline{\left(\frac{T-T_0}{T_0}\right)^2}-\frac{\partial p}{\partial v}\frac{V^2}{T_0}\overline{\left(\frac{s-s_0}{s_0}\right)^2}\right]$$

wie man sieht, wenn man für $\frac{\partial p}{\partial v}$ aus (3) einsetzt. Die Querstriche bedeuten wieder eine räumliche Mittelbildung über alle Volumelemente des Gasvolumens V.

Formel (8a) liefert uns nun tatsächlich den gesuchten Ausdruck der Entropie als Funktion der Temperatur- und Dichteverteilung in dem Gase.

§ 2. Diskussion der Entropieformel.

Setzen wir zunächst voraus, das Gas sei ein ideales Gas, dann ist $a=b=0$ und

$$\frac{\partial p}{\partial v}=-\frac{RT_0}{V^2};$$

daher verwandelt sich (8a) in

$$S-S_0=-\frac{1}{2}\left[C\overline{\left(\frac{T-T_0}{T_0}\right)^2}+R\overline{\left(\frac{s-s_0}{s_0}\right)^2}\right]$$

was mit der von Frank (l. c.) abgeleiteten Formel, die am Anfange dieser Arbeit steht, identisch ist.

Aus der Formel ist zu sehen, daß die Entropie S immer kleiner ist, als die der Gleichverteilung von Temperatur und Dichte entsprechende S_0 und daß sich daher nach dem zweiten Hauptsatze dieser Zustand automatisch als stabiler Endzustand herstellen wird.

Lassen wir nun die Annahme über die spezielle Wahl von a und b fallen, betrachten wir also ein sogenanntes „reales" Gas, so haben wir Formel (8a) direkt zu diskutieren. Betrachtet man zunächst die Dichteverteilung als gegeben, so sieht man, daß S dann seinen größten Wert annimmt, wenn die Größe $\overline{\left(\frac{T-T_0}{T_0}\right)^2}$ verschwindet, d. h. wenn die Temperaturverteilung dem Gleichgewicht entspricht. Dies bietet also keinen Unterschied gegen früher. Anders ist es aber mit dem zweiten Gliede. Solange $\frac{\partial p}{\partial v}<0$, ist es klar, daß $S-S_0$ seinen größten Wert nur dann haben kann, wenn die wesentlich negative Größe auf der rechten Seite von (8a) verschwindet, d. h. im Falle von Gleichverteilung von Temperatur und Dichte. Das Gas verhält sich in diesem Gebiete wie ein ideales Gas. Ist dagegen $\frac{\partial p}{\partial v}>0$, so sehen wir, daß mit wachsendem $\overline{\left(\frac{s-s_0}{s_0}\right)^2}$ auch S wächst und im Endlichen keinen größten Wert besitzen kann. Es wird also in diesem Falle ein Gleichgewicht der Dichteverteilung überhaupt nicht eintreten können, das Gas wird von selbst immer inhomogener; d. h. der Zustand $\frac{\partial p}{\partial v}>0$ ist nicht stabil.

Ist schließlich $\frac{\partial p}{\partial v}=0$, so kommt, wie man sieht, jeder beliebigen Dichteverteilung die gleiche Entropie zu, d. h. jede Dichteinhomogeneität kann sich in diesem Zustande beliebig lange erhalten.

Betrachten wir nun eine Isotherme des Gases unterhalb der kritischen, so sehen wir an ihr tatsächlich die drei besprochenen Gebiete verwirklicht; im allgemeinen stellt die Gleichverteilung von Temperatur und Dichte das Maximum der Entropie dar, dagegen ist das Stück der Isotherme zwischen den beiden Wendepunkten nach dem vorigen instabil, wie ja tatsächlich allgemein bekannt. Den beiden Wendepunkten selbst kommt die Eigenschaft zu, daß sich beliebige Inhomogeneitäten der Dichte daselbst erhalten können. Bei der kritischen Isotherme selbst ist letzterer Zustand auf einen Punkt, den kritischen, zusammengeschrumpft, das instabile Gebiet verschwunden. Alle höheren Isothermen zeigen das Verhalten eines idealen Gases.

§ 3. Anwendung der Entropieformel zur Berechnung der „mittleren Schwankung".

Die vorhergehenden Ausführungen gaben eine rein thermodynamische Ableitung der gesuchten Entropieformel und deren Diskussion nach dem zweiten Hauptsatze. In diesem Paragraphen wollen wir nun von dieser Auffassung

abgehen und die Entropieformel im Boltzmannschen Sinne zu deuten suchen.

Wir nehmen zunächst Temperaturgleichgewicht an, d. h., wir setzen $\left(\frac{T-T_0}{T_0}\right)^2 = 0$ und beschäftigen uns bloß mit den Dichteschwankungen. Die Größe $\sqrt{\left(\frac{s-s_0}{s_0}\right)^2}$, welche mir die mittlere Abweichung der Dichteverteilung des Gases von der normalen in einem bestimmten Zeitpunkte gibt, will ich mit δ bezeichnen. Die Wahrscheinlichkeit des Vorhandenseins eines bestimmten δ in diesem Zeitpunkte soll mit $W(\delta)$ bezeichnet werden[1]). Bezeichnet k wie üblich die Plancksche Konstante, so gilt das Boltzmannsche Prinzip in der Form

$$S - S_0 = k \log \frac{W}{W_0}, \qquad (17)$$

oder

$$\frac{W}{W_0} = e^{\frac{S-S_0}{k}} = e^{\frac{1}{2k}\frac{\partial p}{\partial v}\frac{V^2}{T_0}\delta^2}. \qquad (17')$$

Die Konstante W_0 kann bestimmt werden durch die Bedingung, daß die Wahrscheinlichkeit dafür, daß irgend ein δ vorhanden ist, die Gewißheit sein muß

$$\int_0^\infty W(\delta)\, d\delta = 1 \qquad (18)$$

woraus sich ergibt

$$W_0 = \sqrt{-2\frac{\partial p}{\partial v}\frac{V^2}{T_0 \pi k}}, \qquad (19)$$

welche Größe man sich in (17') eingesetzt denken muß. Aus der gefundenen Wahrscheinlichkeit von δ wollen wir nun den Mittelwert von δ^2, den wir mit $\overline{\delta^2}$ bezeichnen wollen, berechnen. Die Sachlage ist ja so, daß von diesem Gesichtspunkt aus betrachtet im aufsteigenden Teil der Isotherme allerdings $\delta = 0$ den wahrscheinlichsten Zustand ausdrückt, was man nun aber beobachtet, ist ja nicht der wahrscheinlichste, sondern der durchschnittliche Zustand, indem man sich denken muß, daß die verschiedenen Zustände sehr rasch aufeinander folgen, so daß das Gesamtbild ein mittlerer Zustand sein wird. Die Berechnung ergibt

$$\overline{\delta^2} = \int_0^\infty \delta^2 W(\delta)\, d\delta = -\frac{T_0 R}{V^2 N}\frac{1}{\frac{\partial p}{\partial v}} \qquad (20)$$

woraus für die „mittlere Schwankung" folgt

$$\sqrt{\overline{\delta^2}} = \sqrt{-\frac{T_0 R}{V^2 N}\frac{1}{\frac{\partial p}{\partial v}}}. \qquad (20a)$$

Berechnet man statt des Mittelwertes von δ^2 den von δ, so ergibt sich

$$\overline{\delta} = \int_0^\infty \delta W(\delta)\, d\delta = \sqrt{-\frac{2 R T_0}{V^2 N \pi}\frac{1}{\frac{\partial p}{\partial v}}}. \qquad (21)$$

Die beiden Formeln (20a) und (21) unterscheiden sich bloß um den Faktor $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$, was bei allen ähnlichen Mittelbildungen der Fall ist. Das kommt einer Abweichung der beiden Formeln voneinander um 12,5 Proz. gleich.

Formel (21) ist identisch mit der seinerzeit von Smoluchowski[1]) abgeleiteten, während Formel (20a) übereinstimmt mit der von Kamerlingh Onnes u. Keesom[2]) in ihrer Abhandlung über die kritische Opaleszenz verwendeten Formel.

Aus den beiden Formeln (20a) und (21) ist zu ersehen, daß die „mittlere Schwankung" in der Nähe des kritischen Zustandes, wo $\frac{\partial p}{\partial v} = 0$ sehr groß wird, während sie dort, wo die Isothermen steil aufsteigen, nicht besonders in Erscheinung tritt. Es ist allgemein bekannt, daß die makroskopische Folgeerscheinung dieser Dichteschwankungen die „kritische Opaleszenz" bildet, die bereits theoretisch und experimentell untersucht[3]) und als unmittelbare Folge der durch die Dichteschwankungen hervorgerufenen Schwankungen des Brechungsexponenten erkannt worden ist.

Zusammenfassung.

Auf Grund einer einfachen thermodynamischen Betrachtung wird unter Zugrundelegung der van der Waalschen Zustandsgleichung die Entropie eines „realen" Gases als Funktion der mittleren Abweichung der Temperatur- und Dichteverteilung von der gleichförmigen berechnet und die erhaltene Formel für die verschiedenen Gebiete der Isothermen diskutiert.

1) Das ist so zu verstehen, daß $W(\delta)\, d\delta$ die Wahrscheinlichkeit bedeutet, daß δ zwischen δ und $\delta + d\delta$ liegt.

1) l. c. S. 211 Formel (9).

2) Kamerlingh Onnes u. Keesom, Comm. from Phys. Lab., Leiden Nr. 104, 1908 u. Ann. d. Phys. **35**, 591 ff., 1911.

3) M. v. Smoluchowski (l. c.); Kamerlingh Onnes u. Keesom (l. c.); Smoluchowski, Bull. de l'acad. d. sc. de Cracovie 1911 u. Phil. Mag. **23**, 165, 1912; A. Einstein, Ann. d. Phys. **33**, 1275 ff., 1910.

Über die ähnliche Erscheinung der „kritischen Opaleszenz" bei binären Flüssigkeitsgemischen siehe auch R. Fürth, Wiener Ber. **124**, IIa, 1915; F. Zernike, Dissertation, Amsterdam 1915.

Die Formel wird ferner durch Anwendung des Boltzmannschen Prinzips dazu benutzt, um die „mittlere Schwankung" in der Nähe des kritischen Zustandes zu erhalten. Es zeigt sich, daß das Resultat mit den auf kinetischem Wege abgeleiteten Ausdrücken identisch ist.

Prag, im Juni 1917.

(Eingegangen 9. Juli 1917.)

Der positive Kern der Atome.

Von A. Haas.

Neben vielen anderen Vorzügen besitzt die Rutherfordsche Atomtheorie[1]) auch den nicht unwesentlichen, daß auf ihrer Grundlage die gesamte Masse der Materie elektromagnetisch erklärt werden kann. Denn da eine Kugel von dem Halbmesser r und der elektrischen Ladung Q eine elektromagnetische Masse von der Größe besitzt:

$$m_e = \frac{2}{3c^2}\frac{Q^2}{a}, \qquad (1)$$

so genügt die Annahme, daß der kugelförmig gedachte positive Kern eines Atoms (den man nach Rutherford beliebig klein annehmen kann) einen Radius von solcher Länge habe, daß die Gl. (1) beim Einsetzen dieses Wertes für a und der Kernladung für Q die tatsächliche Masse des betreffenden Atoms ergibt.

Da aber nun jedenfalls die der Rutherfordschen Theorie zugrunde liegenden Beobachtungen im allgemeinen eine ziemliche Proportionalität zwischen Atomgewicht und Kernladung erkennen lassen, so müßte aus Gl. (1) geschlossen werden, daß sich ebenso wie die Atomgewichte verschiedenartiger Atome auch die Radien ihrer Kerne verhalten. Die Volumina der Kerne wären also der dritten Potenz des Atomgewichts direkt, die Dichte der positiven Elektrizität in den Kernen demnach der dritten Potenz des Atomgewichts umgekehrt proportional. Das ist eine so unwahrscheinliche Annahme, daß man sie mit Recht mit A. Crehore[2]) ablehnen muß.

Will man diese Schwierigkeit vermeiden, so muß man offenbar (auch um eine Erklärung für die beobachteten Umwandlungen von Atomen zu gewinnen) nach Art der negativen Elektronen individuelle positive Ladungen von je einem Elementarquantum und von unveränderlichem Radius annehmen, den man zweckmäßig so groß wählt, daß nach Gl. (1) daraus der Wert der Masse des Wasserstoffatoms folgt. Es müßte also der Halbmesser eines solchen „positiven Elektrons" ungefähr 1800mal kleiner sein als der eines negativen Elektrons. Eine neue Schwierigkeit entsteht indessen durch die Frage, durch was für Kräfte diese positiven Elektronen zum Kerne zusammengehalten werden sollen, da sie einander doch im umgekehrt quadratischen Verhältnis ihrer Abstände abstoßen.

Eine dritte Schwierigkeit wird schließlich durch die von Rutherford festgestellte Tatsache bedingt, daß die Ladung des positiven Kernes keineswegs (was anzunehmen doch das nächstliegende wäre) ebenso viele positive Elementarquanten beträgt, als das Atomgewicht des betreffenden Elements ist, sondern nur ungefähr halb soviel. Andererseits könnte aber, wenn die Zahl der positiven Elektronen nur ungefähr halb so groß ist wie das Atomgewicht, und jedes der positiven Elektronen die Masse des Wasserstoffatoms hätte, nie eine Gesamtmasse resultieren, die gleich ist dem Produkt aus der Masse des Wasserstoffatoms und dem Atomgewicht.

Die erwähnten Schwierigkeiten ließen sich nun vielleicht durch die im folgenden kurz zu erörternde Hypothese beseitigen. Es sei das Atomgewicht des betreffenden Elements (auf ganze Zahlen abgerundet) r; der Kern wirke aber so, als ob er nur s positive Elementarquanten enthalten würde, wobei eben nach Rutherford s ungefähr der Hälfte von r gleich wäre. Man könnte dann annehmen, daß sich der Atomkern dennoch aus r positiven Elektronen zusammensetze, woraus ohne weiteres folgen würde, daß seine Masse $r$mal so groß sein muß wie m_H, die Masse des Wasserstoffatoms, also tatsächlich gleich sein muß dem Produkt aus m_H und dem Atomgewicht.

Die Gesamtmenge der im Atom enthaltenen negativen Elektrizität muß dann (wenigstens im neutralen Zustande) auch gleich sein r Elementarquanten. Doch sollen im Atom nur s negative Elektronen beweglich sein und um den Kern kreisen. Die übrige negative Elektrizität von $(r - s)$ Elementarquanten soll dazu dienen, um den Zusammenhalt der r positiven Elektronen zu einem einheitlichen Kerne herzustellen. Der Kern würde dann eine Ladung von r positiven und von $(r - s)$ negativen Elementarquanten haben; er würde also mit einer positiven Ladung von s Elementarquanten wirken und im übrigen die Masse $r \cdot m_H$ besitzen. Um diesen Kern würden dann die s beweglichen negativen Elektronen im Sinne der Bohrschen Theorie ihre durch die Quantenbedingung bestimmten Bahnen beschreiben.

1) Vgl. N. Bohr, On the quantum theory of radiation and the structure of the atom. Phil. Mag. **30**, 394, 1915.
2) Phil. Mag. **29**, 310, 1915.

Auf Grund dieser Hypothese wäre eine recht einfache Deutung der Moseleyschen Formel für die K_α-Linie der Röntgenspektren[1]) möglich, wonach die Schwingungszahl ν dieser Linie gleich ist

$$\frac{\nu}{R} = \frac{3}{4}(z-1)^2, \qquad (2)$$

wenn R die Rydbergsche Konstante ist und z die Ordnungszahl, die dem betreffenden chemischen Element im periodischen System zukommt, wenn man die Elemente nach steigendem Atomgewicht ordnet (z ist im allgemeinen der Hälfte des Atomgewichts gleich). Die Moseleysche Formel ergibt sich dann ohne weiteres, wenn man annimmt, daß die K_α-Linie bei dem Übergang eines der kreisenden negativen Elektronen aus einer zweiquantigen in eine einquantige Bahn zustande kommt und daß die Zahl s der beweglichen, im Atome kreisenden Elektronen (wenigstens für die Elemente mit den Ordnungszahlen von 11 bis etwa 30, also von Natrium bis etwa Zink) um eins kleiner ist als die Ordnungszahl des Elements.

Denn in der Tat wird auf Grund dieser Annahme die Anziehungskraft, die der Kern auf ein negatives Elektron von der Ladung ε und der Masse μ in der Entfernung a ausübt,

$$K = \frac{(z-1)\varepsilon^2}{a^2}. \qquad (3)$$

Da diese Kraft der Zentrifugalkraft entgegengesetzt gleich sein muß, muß

$$\mu v^2 = \frac{(z-1)\varepsilon^2}{a} \qquad (4)$$

sein. Nach der Bohrschen Quantenbedingung muß aber für eine einquantige Bahn

$$\mu a v = \frac{h}{2\pi} \qquad (5)$$

sein. Kombiniert man die Gl. (4) und (5) und verwertet man die Relation, die die Rydbergsche Konstante mit den Grundgrößen der Elektronentheorie verknüpft, nämlich[2])

$$R = \frac{2\pi^2 \mu \varepsilon^4}{h^3}, \qquad (6)$$

so ergibt sich für die lebendige Kraft der Wert

$$\frac{\mu v^2}{2} = Rh(z-1)^2. \qquad (7)$$

Die potentielle Energie ist

$$-(z-1)\frac{\varepsilon^2}{a} = -2Rh(z-1)^2, \qquad (8)$$

so daß sich für die gesamte Energie des Elektrons in einer einquantigen Bahn der Wert ergibt

$$W_1 = -Rh(z-1)^2. \qquad (9)$$

Für eine zweiquantige Bahn nimmt die Quantenbedingung die Form an

$$\mu a' v' = 2\frac{h}{2\pi}, \qquad (10)$$

so daß durch eine ganz analoge Überlegung für die Energie eines Elektrons in einer zweiquantigen Bahn folgt

$$W_2 = -\frac{Rh}{4}(z-1)^2. \qquad (11)$$

Die Frequenz der bei dem Übergange von der zweiquantigen in die einquantige Bahn ausgestrahlten Energie ist aber nach der Theorie von Bohr durch die Beziehung gegeben

$$\nu = \frac{W_2 - W_1}{h}, \qquad (12)$$

so daß sich bei Einsetzen der Werte aus den Gl. (9) und (11) in der Tat für ν die Formel von Moseley ergibt. Besondere Hypothesen über Umlagerungen von Elektronenringen, wie sie der Untersuchung von P. Debye[1]) zugrunde liegen, wären dann nicht mehr notwendig. In ähnlicher Weise kann man übrigens auch das Zustandekommen der L_α-Linie der Röntgenspektren durch Übergang eines negativen Elektrons aus einer dreiquantigen in eine zweiquantige Bahn erklären.

Die Bindung der positiven Elektronen durch die negative Elektrizität kann man sich auf mannigfache Art bewirkt denken. Wohl am einfachsten dürfte die Annahme sein, daß die negative Elektrizität von $(r-s)$ Elementarquanten eine einzige Kugel im Zentrum des Atoms bildet[2]). Diese Kugel wäre wohl (hinsichtlich des Volumens) milliardenmal größer als die positiven Elektronen, aber andererseits doch noch billionenmal kleiner als das Atom selbst. Die positiven Elektronen könnte man sich dann entweder in symmetrischer Verteilung an der Oberfläche der Kugel haftend denken, oder man könnte ein Bild gebrauchen, das sich ergibt, wenn man das bekannte Thomsonsche

1) Phil. Mag. **26**, 1024, 1913 und **27**, 703, 1914.

2) Diese Relation findet sich (was in diesem Zusammenhange zu bemerken gestattet sei) zum erstenmal in einer Abhandlung des Verfassers dieses Aufsatzes, und zwar in den Sitz.-Ber. d. Wiener Akad., Math.-naturwiss. Klasse, Abt. IIa, **119**, 1910 auf S. 138 als Gl. (67). Die dort gebrauchte Größe γ ist das Verhältnis ε/μ. Nur tritt dort statt des Zahlenfaktors 2 der Faktor 4 auf. Dieser Unterschied erklärt sich daraus, daß der Wert für die potentielle Energie in der Thomsonschen Theorie (weil in dieser Theorie die Anziehungskraft quasielastisch ist) nur halb so groß, aber mit entgegengesetztem Vorzeichen erscheint wie in der Rutherfordschen Theorie.

1) Diese Zeitschrift **18**, 276, 1917.

2) Auf die Möglichkeit komplizierterer Annahmen scheint andererseits die Tatsache hinzudeuten, daß jeder radioaktive Zerfall mit der Bildung von Heliumatomen verbunden ist.

Atommodell hinsichtlich des Volumens billionenmal verkleinert und in ihm nun die Rollen der positiven und der negativen Elektrizität vertauscht. Man könnte nämlich annehmen, daß die positiven Elektronen in der viel größeren (im Verhältnis zum Atom trotzdem jedoch verschwindend kleinen) Kugel von homogener negativer Elektrizität, in deren Innerem sie quasielastische Anziehungen erfahren, zu symmetrischen Gleichgewichtslagen[1]) angeordnet sind. Gegenüber dem Thomsonschen Modell bestünde, abgesehen von der Verkleinerung und der wechselseitigen Vertauschung von positiver und negativer Elektrizität allerdings noch in zweifacher Hinsicht ein weiterer Unterschied. Die Gesamtmenge der in der negativen Kugel eingeschlossenen positiven Elektrizität wäre nicht so groß wie die negative Elektrizität selbst; es würde vielmehr die positive Elektrizität überwiegen. (Daß trotzdem Gleichgewichtslagen möglich sind, geht aus einer früheren Untersuchung des Verfassers[2]) hervor.) Ferner hätte man sich die positiven Elektronen innerhalb der negativen Kugel nicht kreisend, sondern ruhend zu denken.

Denn was sich im Atome bewegt und dadurch unter Umständen zur Strahlungsemission Anlaß gibt, sollen ja nicht die positiven Elektronen im Kerne sein, sondern die um diesen Kern von der Masse $r \cdot m_H$ und der scheinbaren Ladung $s \cdot \varepsilon$ in ein- oder mehrquantigen Bahnen kreisenden s negativen Elektronen.

1) Das Heliumatom (für das wegen der Kleinheit seiner Ordnungszahl $z = 2$ die vorerwähnte Relation $s = z - 1$ nicht gilt) könnte man sich etwa bestehend denken aus einer negativen Kugel von zwei Elementarquanten, in der ein Tetraeder von vier positiven Elektronen eingeschlossen wäre, während zwei negative Elektronen den Kern umkreisen würden. — Das Wasserstoffatom, bei dem negative Elektrizität zur Bindung des Kernes überflüssig ist, dürfte wohl eine Sonderstellung einnehmen.

2) Über Gleichgewichtslagen von Elektronengruppen in einer äquivalenten Kugel von homogener positiver Elektrizität. Ber. d. Wien. Akad., Math.-naturw. Klasse, Abt. IIa, **120**, 1111—1171, 1911.

Leipzig, am 19. Juli 1917.

(Eingegangen 23. Juli 1917.)

Zur Bestimmung der Horizontalintensität des Erdmagnetismus. Ein Lokalvariometer.

Von C. Dieterici.

Die hier beschriebene Methode zur Bestimmung der Horizontalintensität H des Erdmagnetismus ist aus dem Bedürfnis entstanden, im physikalischen Praktikum eine schnell ausführbare und sichere Resultate gebende Apparatur zu schaffen. Es ergab sich, daß man sie mit großer Sicherheit auch als Lokalvariometer benutzen kann.

In allen Instituten ist zur Bestimmung von H die Gaußsche Methode in Gebrauch, die als einzige, wirklich absolute, ihren unvergänglichen Wert hat, weil sie die Grundlage des absoluten Maßsystems bildet. Sie hat nur den Nachteil, daß die Ausführung der Schwingungs- und Ablenkungsbeobachtung viel Zeit in Anspruch nimmt und zumal bei ungeübten Beobachtern selten an einem Tage zum Abschluß kommt. Wohl aus diesem Grunde ist vielfach eine zweite Methode eingeführt: durch Zusammenschaltung eines geeichten Ampèremeters mit einer Tangentenbussole aus dem Reduktionsfaktor der letzteren H zu ermitteln. Diese zweite Methode ist natürlich keine absolute, wie die Gaußsche; da ja aber heute geeichte Ampèremeter leicht zur Verfügung stehen, wird sie vielfach als Ersatz der umständlicheren Gaußschen Methode angewendet.

Die Methode, die ich seit einiger Zeit im hiesigen Institut ausführen lasse, beruht auf folgender Überlegung: ein Stabmagnet sei in der Mitte einer — unendlich — langen Spule aufgehängt zur Beobachtung seiner Schwingungsdauer nach Gauß. Ein Akkumulator gestattet unter Einschaltung eines Widerstandskastens, Milliampèremeters und Wippe in die Spule einen Strom genau meßbarer Stärke zu schicken; die Spule mit Magnet liege genau in der Richtung des magnetischen Meridians.

Ist t_0 die Schwingungsdauer des Magneten, ohne daß das Spulenfeld erregt ist, also allein unter Einfluß des Erdmagnetismus H, so hat derselbe Magnet eine Schwingungsdauer t_1, wenn sich das Spulenfeld H_s in gleichem Sinne über das Erdfeld superponiert und es ist

$$t_0^2 : t_1^2 = 1 + \frac{H_s}{H}.$$

Bei entgegengesetzter Stromrichtung tritt eine neue Schwingungsdauer t_2 auf und es ist

$$t_0^2 : t_2^2 = 1 - \frac{H_s}{H}.$$

Die Feldstärke des superponierten Spulenfeldes kann in erster Annäherung aus der Windungszahl der Spule durch

$$H_s = \frac{4\pi n i}{10} \text{ Gauß}$$

berechnet werden, und damit ist aus dem Verhältnis der Quadrate der Schwingungsdauern H bestimmbar.

Man erkennt, daß es nicht nötig ist, das Trägheitsmoment des Magneten und seines Schwingungsschiffchens zu bestimmen, weil es bei beiden Beobachtungen ungeändert bleibt.

ferner, daß eine Reduktion der Schwingungsdauern auf unendlich kleine Schwingungen nicht nötig ist, sofern man nur dafür sorgt, daß die Schwingungsweiten bei beiden Beobachtungen annähernd gleiche sind, drittens muß — sofern keine Störungen die Beobachtung beeinflußt haben — das Verhältnis $t_0^2 : t_1^2$ genau soviel über der Eins liegen, wie $t_0^2 : t_2^2$ unter der Eins. Man kann endlich die Stärke des superponierten Spulenfeldes beliebig verändern: nur muß man unterhalb der Grenze der Astasierung des Magneten bleiben[1]).

In der Werkstatt des Instituts wurde ein altes Galvanometergestell zu einem „Spulenmagnetometer" umgearbeitet in der Art, daß an die Aufhängevorrichtung ein kleiner, 8 cm langer Stabmagnet aus einem Meyersteinschen Magnetometer mit seinem Lager angehängt wurde. Die Spule war im ganzen 49 cm lang und trug 348 Windungen eines 1 mm dicken Leitungsdrahtes in einer Lage, der Durchmesser der Spule betrug 5 cm, der Radius der Windungen war also, unter Berücksichtigung der Drahtdicke, 2,55 cm. Die Spule bestand aus zwei Hälften, welche von beiden Seiten über den Magneten zusammengeschoben werden konnte, in der Mitte nur eine enge Durchbohrung freilassend, um den das Schwingungsschiffchen mit Magneten tragenden Stift hindurch zu lassen. Die beiden hintereinander verbundenen Spulenhälften ruhten auf einem Lager, welches um die Achse des Instruments drehbar war, so daß sie genau in der Nord—Süd-Richtung festgeklemmt werden konnte, was man daran erkennt, daß der Magnet aus seiner Ruhelage durch das Spulenfeld nicht abgelenkt wird. Die Schwingungsdauer wird mit Spiegel und Skala an einem Chronometer beobachtet, der Hohlraum der Spule bietet genügenden Raum für die Schwingungen des Magneten.

Aus den angegebenen Dimensionen der Spule ergibt sich nach der angenäherten Formel für das Kraftlinienfeld der Spule

$$H_s = \frac{4\pi n i}{10} = 8{,}9247 \text{ Gauß pro Amp.}$$

Berücksichtigt man, daß die Spule nicht unendlich lang ist und berechnet das Kraftlinienfeld nach den genaueren Formeln[2]) in der Mitte der Spule, so erhält man

$$H_s = 3{,}9784 \frac{\pi n i}{10} = 8{,}8766 \text{ Gauß pro Amp.},$$

also eine Feldstärke, die nur um $^1/_2$ Proz. von der angenäherten abweicht, und die Formeln ergeben, daß man das Spulenfeld in der Längsrichtung auf Strecken gleich der Länge des angewendeten Magneten auf 0,1 Proz. konstant annehmen kann. Der Wert

$$H_s = 8{,}8766 \text{ Gauß pro Amp.}$$

ist im folgenden verwendet.

Zur Prüfung des Spulenmagnetometers wurden an derselben Stelle des Obergeschosses, an der das Meyersteinsche Magnetometer $0{,}186 \pm 0{,}01$ Gauß ergeben hatte, die in nachfolgender Tabelle enthaltenen Beobachtungen ausgeführt.

Am Kopf der Tabelle steht die beobachtete Schwingungsdauer t_0 des Magneten ohne Spulenfeld, unter i ist die am geeichten Milliampèremeter abgelesene Stromstärke angegeben, unter t_1 und t_2 die Schwingungsdauern bei gleich bzw. entgegengesetzt gerichtetem Spulenfeld. Daraus folgt aus dem Verhältnis der Quadrate der Schwingungsdauern das Verhältnis $H_s : H$, und mit dem oben angegebenen Wert für H_s pro Amp. die Horizontalintensität H, berechnet mit dem Mittelwert von $H_s : H$.

Tabelle I. Obergeschoß.

Magnet I. $t_0 = 8{,}360$ sec.

i	t_1	t_2	$\frac{H_s}{H}$	H
0,00724 Amp.	7,200 sec	10,315 sec	0,3481	
			0,3433	
			0,3457	0,1859 Gauß
0,00880	7,008	10,929	0,4230	
			0,4150	
			0,4190	0,1864
0,01130	6,750	12,222	0,5338	
			0,5321	
			0,5330	0,1882
				0,1868 Gauß

Das erhaltene Resultat stimmt mit dem nach der Gaußschen Methode an derselben Stelle gefundenen gut überein.

Fragt man nach den möglichen Beobachtungsfehlern, so ist zu bemerken, daß die Bestimmung der Schwingungsdauern — sofern keine äußeren Störungen in Betracht kommen — mit einem guten Chronometer durch Terminsbeobachtung zu einem beliebigen Grade der Genauigkeit gebracht werden kann. Nimmt man 0,005 sec Zeitfehler in der Bestimmung der Schwingungsdauer an, oder etwa 1 : 2000, so kann das Verhältnis $t_0^2 : t_1^2$ bzw. $t_2^2 : t_1^2$ im

1) Eine Astasierungsvorrichtung für Magnetometer in ähnlicher Art beschreibt E. Gumlich, Verh. d. D. Phys. Ges. 16, 406—410, 1914.

2) F. Kohlrausch, Lehrb. d. prakt. Phys., 12. Aufl., S. 535, 1914.

ungünstigsten Falle um 1 : 500 falsch sein und damit dürfte das Verhältnis $H_s : H$, je nachdem es viel oder wenig über der Eins liegt, nur Fehler haben, die kleiner als 1 Proz. sind. Die mit $H_s : H$ überschriebene Spalte zeigt aber Abweichungen, die mehr als das Doppelte betragen. Es zeigen sich hier die momentanen Störungen, welche in einem ungeschützten Gebäude durch Straßenbahnbetrieb u. dgl. hervorgerufen werden und die es unmöglich machen, die Schwingungsdauer eines Magneten mit dem Grade der Genauigkeit zu bestimmen, den die reine Zeitbeobachtung der Durchgänge durch die Ruhelage erreichen ließe.

Als konstante Fehlerquellen der hier beschriebenen Methode kommen zwei in Betracht: erstens die Frage, ob das magnetische Spulenfeld in der Mitte inhomogen ist in Richtung des Durchmessers, und zweitens, ob Induktionsströme, die durch die Bewegung des Magneten in der Spule induziert werden, einen merklichen Einfluß haben.

Um die erste Frage zu beantworten, ließ ich den Aufhängefaden so weit herab, daß der Magnet um mehr als 1 cm niedriger lag, als die Spulenachse. Ich konnte aber keine Veränderung der Schwingungsdauer feststellen, die über die äußeren Störungen hinausging. Daraus folgt, daß man wohl wenigstens in dem mittleren Teile, der für die Schwingungen des Magneten in Betracht kommt, in einer geraden Spule das magnetische Feld als homogen ansehen kann.

Auch eine merkliche Beeinflussung der Schwingungsdauern durch Induktionsströme, die eine Dämpfung hätten hervorbringen müssen, konnte nicht beobachtet werden.

Da sich die aus Spulenmagnetometer, Milliampèremeter usw. zusammengesetzte Apparatur ohne Schwierigkeit an anderen Stellen aufstellen ließ, veranlaßte ich Herrn stud. phil. Portal, an verschiedenen Stellen des Instituts die Horizontalkomponente des Erdmagnetismus zu bestimmen und so die Apparatur als Lokalvariometer zu benutzen. Es seien nur die Beobachtungen an zwei Stellen wiedergegeben (siehe Tabelle II und III).

Man erkennt, daß die Beobachtungen an jeder einzelnen Stelle unter sich gut übereinstimmen, aber die lokalen Verschiedenheiten

Tabelle II. Kellergeschoß.

Magnet I. $t_0 = 10{,}772$ sec.

i	t_1	t_2	$H_s : H$	H
0,00760 Amp.	9,030 sec	14,07 sec	0,4230	
			0,4139	
			0,4185	0,1612 Gauß
0,0094	8,740	15,44	0,5190	
			0,5132	
			0,5161	0,1617
0,0124	8,283	19,090	0,6913	
			0,6816	
			0,6865	0,1603
				0,1614 Gauß

Tabelle III. Sockelgeschoß.

Magnet II. $t_0 = 8{,}715$ sec.

i	t_1	t_2	$H_s : H$	H
0,00752 Amp.	7,480 sec	11,140 sec	0,3574	
			0,3881	
			0,3733	0,1788 Gauß
0,0094	7,194	12,015	0,4675	
			0,4740	
			0,4708	0,1772
0,0124	6,850	14,185	0,6185	
			0,6220	
			0,6207	0,1773
				0,1778 Gauß

deutlich heraustreten zu lassen, daß daher die beschriebene Methode sich auch als Lokalvariometer gut verwenden läßt.

Für das physikalische Praktikum hat sie den Vorteil, daß sie sich unmittelbar an die Gaußsche Methode anlehnt, und schneller als diese ausgeführt werden kann. Natürlich ist auch sie keine absolute im Gaußschen Sinne, weil sie sich auf die Angaben des Milliampèremeters stützt.

Kiel, Physikalisches Institut der Universität, Juli 1917.

(Eingegangen 28. Juli 1917.)

ZUSAMMENFASSENDE BEARBEITUNGEN.

Über **Röntgenspektroskopie** [1]).

Von Ernst Wagner.

Mit Tafel XI.

Obwohl die Röntgenspektroskopie heute erst einige wenige Jahre besteht — Laues Entdeckung fällt in den April 1912, Braggs Spektrometer datiert vom April 1913 —, so kann schon jetzt ein zusammenfassender Bericht über die Ergebnisse dieser jüngsten spektroskopischen Wissenschaft versucht werden. Denn sowohl in Hinsicht auf ihre Methoden als auch auf den weiten Umfang des gewonnenen Materials von Wellenlängenmessungen der Linien- und Absorptionsspektren fast aller Elemente ist ein befriedigender Standpunkt erreicht.

Die Klarheit und wunderbare Einfachheit, die in der Beziehung dieser Spektren zu der das Element charakterisierenden Stellung im periodischen System zutage getreten ist, verschafft der Röntgenspektroskopie bereits den Vorrang vor der verwickelteren optischen Schwesterwissenschaft. Eine weittragende Theorie der Spektren auf Grund der Rutherford-Bohrschen Atomvorstellungen ist im Begriffe, uns Einblick in den Aufbau der Atome zu gewähren. Messungen über die Anregungsbedingungen der Atomlinienspektren durch Kathodenstrahlen verschiedener Geschwindigkeit bzw. durch Röntgenstrahlen selbst ergänzen einander und bestätigen im einzelnen das theoretische Bild des hier obwaltenden Fluoreszenzmechanismus.

Endlich ist durch die Untersuchung des kontinuierlichen Röntgenspektrums, das von Kathodenstrahlen streng konstanter Geschwindigkeit erzeugt wird, ein für die Theorie der Strahlung wichtiges Ergebnis gewonnen: Die Entdeckung eines scharf definierten kurzwelligen Endes im Spektrum. Die Abhängigkeit dieser Grenzfrequenz vom Potential ist streng reguliert durch die Einsteinsche Quantenbeziehung: $Ve = h \cdot \nu$ und ermöglicht eine Präzisionsmessung der wichtigen Strahlungskonstante h.

Grundlagen und Methoden.

Im Laueschen Versuch wird ein Kristall von einem schmalen zylindrischen Bündel von Röntgenstrahlen durchsetzt; es geht dann von dem getroffenen Kristallteil nach verschiedenen Richtungen das System der abgebeugten Röntgenstrahlen aus. In ihrer räumlichen Anordnung „spiegelt" sich im eigentlichen Sinne der Bau des Raumgitters wieder, indem man nach der anschaulichen Betrachtungsweise Braggs die Lage der abgebeugten Strahlen als durch Reflexion der primären an den mit Atomen besetzten Netzebenen im Kristallinnern entstanden denken kann. Eine solche Reflexion würde vermöge der molekularen, nur durch die Wärmebewegungen getrübten Ebenheit von Kristallflächen für Röntgenstrahlen jeder Wellenlänge zustande kommen, wenn nur eine einzige Atomebene in Frage käme: ihre räumliche Wiederholung im Abstand d in parallelen äquidistanten Schichten verbunden mit dem Durchdringungsvermögen der Röntgenstrahlen bewirkt aber durch Interferenz eine Auslöschung aller Wellenlängen mit Ausnahme einiger weniger, die im Verhältnis von einfachen ganzen Zahlen (Obertönen) zueinander stehen und folgende Grundbeziehung der Röntgenspektroskopie erfüllen (vgl. Fig. 1):

$$n\lambda = 2d \sin \varphi,$$

d. h. in Worten: Eine Reflexion unter dem Winkel φ zwischen Strahl und Netzebene (häufig „Glanzwinkel" genannt) kann an einer

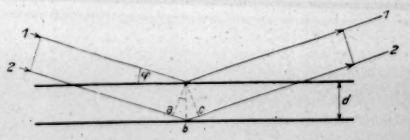

Fig. 1.

Netzebene mit der „Gitterkonstanten" d nur für eine Strahlung stattfinden von ganz bestimmten Wellenlängen λ und, in abnehmender Stärke, von $\frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{3}$ usw. entsprechend dem Gangunterschied n von 1, 2, 3 usw. ganzen Wellenlängen bei der Interferenz der an aufeinanderfolgenden Netzebenen reflektierten Strahlen (z. B. 1 und 2 Fig. 1, wo $abc = 2d \sin \varphi$).

Im Laueschen Versuch durchsetzt das Primärbündel gleichzeitig Netzebenen verschiedenster Gitterkonstanten und unter verschiedenstem Winkel: Soll Reflexion an allen diesen Ebenen stattfinden, wie der Versuch tatsächlich zeigt, so müssen im allgemeinen die verschiedensten Wellenlängen in der einfallenden Strahlung vorhanden sein. Wir erkennen so als Voraussetzung für das Zustandekommen der Laue-

1) Als zusammenfassende Übersichten seien genannt: M. v. Laue, Enzyklopädie der mathem. Wissenschaften. W. L. Bragg, Jahrb. d. Rad. u. Elektr. **11**, 346, 1914. M. Siegbahn, Jahrb. d. Rad. u. Elektr. **13**, 296, 1916. Hier findet sich eine ausführliche Literaturübersicht.

schen Interferenzbilder die Existenz des kontinuierlichen (Brems-)Spektrums, aus dem die einzelnen abgebeugten Strahlenbündel diskrete annähernd monochromatische Wellenlängen aussondern. Hiermit war eine erste Aussage über das Röntgenspektrum ermöglicht. Seine Beschränkung nach kurzen Wellen, seine Abhängigkeit von der Härte der Röntgenröhre war aus der Schwärzungsverteilung der Interferenzflecken auf der photographischen Platte zwar qualitativ zu entnehmen, zu einem tieferen Eindringen ist indessen diese Methode nicht geeignet. Denn einmal schließt sie durch Absorption im Kristall die Untersuchung der längeren Wellenlängen aus; vor allem ist die Intensität der Reflexion an den verschiedenen Netzebenen stark abhängig von deren Gitterkonstante und dem Reflexionswinkel. In der Tat konnten in dieser Weise angestellte Versuche[1]) nur ein rohes Bild des kontinuierlichen (photographisch wirksamen) Röntgenspektrums gewinnen, ebensowenig hat diese Methode zur Auffindung der scharfen Spektrallinien oder Absorptionsbandkanten geführt oder führen können.

Andererseits erweist sie sich zur Strukturerforschung der Kristalle von größtem Nutzen durch ihre reichhaltigen, viele Netzebenen gleichzeitig betreffenden Aussagen.

Den entscheidenden Schritt zur Erzeugung eines Spektrums mit scharfen Abbildungsbedingungen taten W. H. und W. L. Bragg[2]) in unmittelbarer Anwendung ihrer Reflexionsanschauung.

Die Braggsche Methode benutzt die Reflexion des durch enge Blenden begrenzten Primärstrahles an einer einzigen intensiv reflektierenden Kristallfläche, deren schrittweise Drehung den Reflexionswinkel φ zwischen 0^0 und 90^0 zu ändern erlaubt. Das reflektierte Bündel stellt auf diese Weise in zeitlicher Folge räumlich getrennt den Wellenlängenbereich von $\lambda = 0$ bis $\lambda = 2d$ als Spektrum dar. Die Intensitätsabnahme der Reflexion mit wachsendem Winkel φ beschränkt das Spektrum meist auf kleinere Bereiche. Bei kleinen Werten von φ (und λ) wird φ angenähert λ proportional, so daß sehr kurze Wellenlängen relativ sehr ungenau zu messen sind. Als Kristallfläche wird — was wesentlich ist — eine äußere natürliche Spaltfläche oder auch eine künstlich angeschliffene Netzebene verwendet.

Fig. 2 zeigt die Anordnung schematisch im einzelnen[1]).

Der Kristall K steht mit der spiegelnden Fläche in der Achse O eines Goniometers. Durch die Bleispalte S_1 und S_3 fällt die Primärstrahlung axial unter kleinem Öffnungswinkel δ ein, d. i. der Winkel, unter dem der Brennfleck der Kathodenstrahlen auf der Antikathode vom Spalt S_1 erscheint. Das reflektierte Bündel dringt durch den Bleispalt S_2 in die Ionisationskammer IK ein, die zur Verstärkung der Ionisierung meistens mit einem schweren Gas (Methyljodid, Schwefeldioxyd) gefüllt wird. Zur Erforschung des Spektrums wird der Kristall in kleinen Schritten weitergedreht und mit der Ionisationskammer im doppelten Winkelbetrag nachgefahren. Zur Verhütung von Kapazitätsänderungen und aus mechanischen Gründen wird die Elektrometerverbindung zur Ionisationskammer auf dem Weg über die Drehachse bewirkt. Das Elektrometer steht praktisch unter dem Goniometer.

Eine Komplikation für den Strahlengang schien in der Braggschen Anordnung dadurch gegeben, daß die Reflexion von Strahlung einer bestimmten Wellenlänge λ_0 unter ihrem konstanten Winkel φ_0 nicht nur bei einer einzigen Kristallstellung statthat, sondern infolge des Öffnungswinkels δ über einen Bereich δ von Kristallpositionen während der Drehung erfolgt: Es fragte sich, ob unter diesen Umständen das reflektierte Strahlenbündel einen festen Konvergenzpunkt besitzt und damit spektrale Reinheit ermöglicht. W. H. und W. L. Bragg konnten sogleich in ihrer ersten Arbeit zeigen, daß bei Anwendung ebener Kristallflächen wirklich eine (nicht vorauszusehende und für die Methode sehr wichtige) Fokussierung homogener Strahlen zustande kommt. An Fig. 3 sei der Strahlengang in der Einfallsebene erläutert. Die Kristallstellung AA ist so gewählt, daß aus dem einfallenden homogenen Bündel (λ_0) gerade der axiale Strahl S_1O unter seinem selektiven Winkel φ_0 nach OS_2 reflektiert wird: Kein anderer Kristallteil außer dem sehr kleinen Bereich O kann gleichzeitig aus dem Primärbündel δ diese Strahlung reflektieren. Nach einer kleinen Drehung der Kristallebene in die Lage BB kann O nicht mehr spiegeln und es sei jetzt B der reflexionsfähige Punkt des Kristalls ($\varphi = \varphi_0$) geworden. Der hier reflektierte Strahl schneidet in S_2 den vorher reflektierten. Nach einfacher geometrischer Überlegung gehen während der Drehung um den Winkel δ alle reflektierten Strahlen derselben Wellenlänge

1) P. P. Ewald, Ann. d. Phys. **44**, 257, 1914; E. Keller, Ann. d. Phys. **46**, 157, 1915.

2) W. H. und W. L. Bragg, Proc. Roy. Soc. A. **88**, 428, 1913.

1) Vgl. auch die Abbildung des Braggschen Spektrometers bei W. L. Bragg, Jahrb. d. Rad. **11**, 355, 1914.

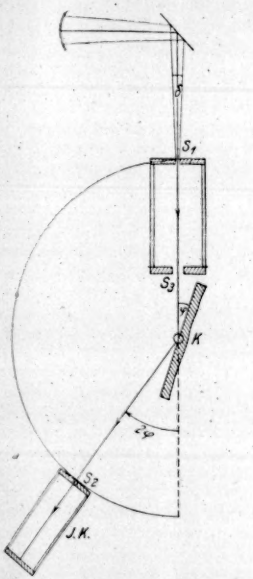

Fig. 2.

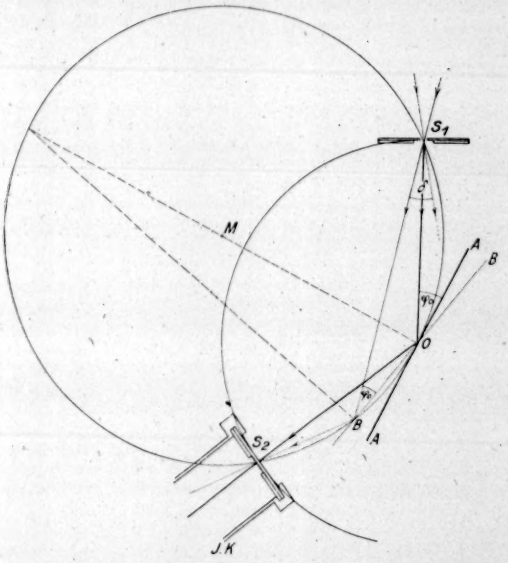

Fig. 3.

durch denselben Punkt S_2. Legt man einen Kreis durch $S_1 O S_2$, so liegen die gerade reflektierenden Punkte der Kristallebene auf den Schnittpunkten dieses Kreises mit der Kristallebene. Der „Fokus" S_2 hat von der Achse O den gleichen Abstand wie der Spalt S_1. Natürlich gilt diese „Fokusbedingung" für alle Wellenlängen. Daher ist es für eine scharfe Abbildung des Spektrums nötig, den Spalt der Ionisierungskammer bzw. die empfindliche photographische Schicht (als Film) kreisförmig und im richtigen Abstand von der Drehachse um O laufen zu lassen. Indessen erlaubt die meistens bestehende Kleinheit von δ ohne Schaden von dieser Bedingung einigermaßen abzuweichen und für kleine Spektralbezirke ebene photographische Platten zu verwenden, die tangential zu dem Fokussierungskreis aufzustellen sind.

Man kann diesen überraschenden fokussierenden Effekt des Drehkristalls für homogene Strahlung gut mit dem Fluoreszenzschirm beobachten. Eine harte Röhre mit Palladiumantikathode ist sehr geeignet. Beim Drehen des Kristalls mit der Hand bemerkt man das gleichmäßige Wandern der Helligkeit, die vom kontinuierlichen Spektrum stammt, sobald man aber in die Stellung des Kristalls gelangt, wo die starke α-Linie der K-Serie reflektiert wird, bleibt diese helle Reflexionslinie so lange stehen, als man durch den Öffnungswinkel δ dreht, währenddessen der kontinuierliche Spektralteil weiter wandert.

Einfluß der Kristallfehler auf die Abbildung und seine Vermeidung durch die Methode der **stetigen** Kristalldrehung.

Setzt man eine streng ebene und im mikrokristallinischen Bau fehlerfreie Spaltfläche voraus, so ist erstens die Reflexion homogener Strahlung auf ein Winkelgebiet δ des Kristalls beschränkt, der gleich dem Öffnungswinkel des Primärbündels ist; zweitens verlaufen alle reflektierten Strahlen während einer stetigen Drehung um δ durch den Fokus; drittens haben sie währenddessen gleiche Intensität — gleiche Intensitätsverteilung innerhalb des Primärbündels vorausgesetzt —, obwohl sie von immer anderen Kristallteilen stammen.

Unsystematische Fehler im Kristallbau (z. B. Verwerfungen wellenförmiger Art, wie sie häufig am Steinsalz auftreten) bewirken, daß während der Drehung erstens ein größeren Winkelgebiet als dem Öffnungswinkel stattfindet; daß zweitens

der reflektierte Strahl um die fehlerfreie Richtung nach Fehlerart herumschwankt und so eine Unschärfe der fokussierten Abbildung bedingt; daß drittens die reflektierte Intensität in unregelmäßiger Weise wechselt und um so kleiner in den einzelnen Zwischenstellungen des Kristalls ist, je größer das Reflexionsgebiet ist.

Solange man also — wie W. H. und W. L. Bragg in allen ihren Arbeiten — mit Kristall und Ionisationskammer im Reflexionsverhältnis zueinander schrittweise[1]) durch das Spektrum geht, mißt man in Wirklichkeit jeweils bei feststehendem Kristall die Reflexion und erhält jene Zufallswerte in der Intensität, die die Kristallfehler unvermeidlich bedingen.

Von diesen macht, nach W. H. Bragg[2]), jede Methode frei, welche die Gesamtintensität homogener Reflexion während der Kristalldrehung durch das gesamte überhaupt reflektierende Gebiet mißt. Dies gelingt elektrometrisch, indem man den Spalt der Ionisationskammer unter Erfüllung der Fokusbedingung fest in die gewünschte Stellung im Spektrum bringt und die Gesamtionisation mißt, die sich ergibt, wenn der Kristall in zeitlich gleichmäßigen kleinen Schritten oder besser stetig durch das ganze Reflexionsgebiet hindurchgedreht wird. Auf diese Weise beteiligen sich alle bestrahlten Kristallteilchen entsprechend ihrer Lagerung nacheinander an der Reflexion und setzen einen Mittelwert der Reflexion zusammen, der als das wahre Maß der Reflexion zu gelten hat. W. H. Bragg maß nach dieser Methode zum erstenmal exakt die reflektierte Intensität der homogenen Rhodiumstrahlung an Steinsalz und Diamant in mehreren Ordnungen, sowie den Einfluß der Temperatur des Kristallgitters auf die reflektierte Intensität.

Es ist einleuchtend, daß bei dieser summierenden Art der Reflexionsmessung am drehenden Kristall die Reflexionswerte in vergleichbarer Weise für Gebiete spektraler Nachbarschaft zustande kommen; für weiter getrennte Gebiete ist zu bedenken, daß im Falle kleiner Wellenlängen und entprechend kleiner Winkel φ auch die peripheren Teile der Kristallfläche (diese genügend ausgedehnt gedacht) innerhalb des Öffnungswinkels δ zur Reflexion gelangen und damit neue Reflexionsbedingungen geschaffen werden.

Über die Beziehung zwischen Intensität der reflektierten Strahlung und dem Öffnungswinkel δ sei folgendes erwähnt. Die von den summierenden Methoden gemessene Gesamtintensität der Reflexion homogener Strahlung während der Drehung des Kristalls ist unabhängig von δ, d. h. unabhängig von der Größe des Kathodenstrahlenfokus (gleichen Kathodenstrom usw. vorausgesetzt). Denn der Reflexionsbereich ist proportional δ, die primäre und also auch die reflektierte Intensität pro Grad des Bereiches ist umgekehrt proportional δ. Wichtig ist, daß bei großem Öffnungswinkel δ der Kristall lang genug ist, um ihn auszunutzen; bei kleinem (mit δ vergleichbarem) φ — d. i. bei kurzen Wellenlängen — ist das nicht mehr möglich. Darum wird mit dem drehenden Kristall der äußerst kurzwellige Spektralbereich mit zu kleiner Gesamtintensität reflektiert.

Will man dagegen mit dem, zeitlich getrennte Eindrücke nicht summierenden Auge, d. h. also bei feststehendem Kristall die reflektierte Intensität, z. B. einer Spektrallinie auf dem Fluoreszenzschirm möglichst hell sehen (oder in der Ionisationskammer möglichst große Ströme messen), so kommt es auf möglichst große Strahlungsdichte an. δ ist hier möglichst klein zu wählen; dies geschieht entweder durch kleinen Kathodenstrahlfokus oder nach W. H. Bragg, indem man die Antikathodenebene parallel Spalt und Drehachse stellt, so daß die Primärstrahlung sie fast streifend verläßt. Da die Linienstrahlung Fluoreszenzstrahlung ist, so bleibt die Gesamtemission, entgegen Lamberts Gesetz, bei streifendem Austritt konstant und ist auf einen sehr kleinen Winkel δ konzentriert.

Schon vor der wichtigen Erkenntnis[1]) der fehlerausgleichenden Wirkung des drehenden Kristalls erntete de Broglie[2]) ihre Früchte mit Versuchen, bei welchen er die reflektierte Intensität auf die photographische Platte[3]) einwirken ließ. Die photographische Methode hat von selbst die Eigenschaft der elektrometrischen in der Braggschen jüngsten Anwendung: Der Summierung von Wirkungen an dem gleichen Plattenort in zeitlicher Folge. Indem de Broglie die Platte fokussiert aufstellte und den Kristall über den gewünschten Spektralbereich mit einem Heliostatenuhrwerk langsam hinweg drehen ließ, erhielt er die ersten objektiven (l. c. publizierten) Röntgenspektra, die aus-

1) Oder auch kontinuierlich, wie A. H. Compton, Phys. Rev. **7**, 646, 1916 mit seinem registrierenden Spektrometer. Denn auch hier wird jeder Ionisationskammerstellung immer nur eine Kristallposition zugeordnet.

2) W. H. Bragg, Phil. Mag. **27**, 881, 1914.

1) W. H. Bragg, Phil. Mag. l. c.; E. Wagner, diese Zeitschr. **16**, 30, 1915.

2) M. de Broglie, C. R. **157**, 924, 1913; **158**, 177, 1914.

3) Unter den ersten Versuchen ist J. Herweg, Verh. d. D. phys. Ges. **15**, 555, 1913, zu nennen, der mit feststehendem Kristall Spektrallinien am Gips erhielt; die späteren Versuche (l. c. **16**, 73, 1914) des Autors mit dem drehenden Kristall zeigen wegen mangelnder Fokussierung unscharfe Linien.

gezeichnet waren durch überraschende Schärfe der Linien- und Bandenköpfe.

Die photographische Methode bietet gegenüber der mühseligen und zeitraubenden Ionisationsmethode wesentliche Vorteile dar. Einmal stehen bei den jetzt üblichen verkürzten Hin- und Herschwenkungen des Kristalls (mittels elektrischen Schaltwerkes und Elektromotoren) alle Spektralgebiete unter gleichen Bedingungen der Primärstrahlen (bzw. des Röhrenzustandes). Dann registriert die Platte beliebig dicht nebeneinander — z. B. im Spektralbereich einer Linie — ohne weiteres die während der Kristalldrehung summierten Reflexionsintensitäten. Diese doppelte Variation in der Stellung von Kristall und Ionisationskammerspalt würde eine erhebliche Mühe für die Ionisationsmethode bedeuten. Endlich summiert die Ionisation alle reflektierten Intensitäten in der Längsrichtung des Kammerspaltes. Die Krümmung der Spektrallinien und Fehler im Parallelismus von Spalt und Spektrallinie veranlassen so Verwischungen der feinen Details, die auf der Platte erhalten bleiben. Für die Ausmessung von Spektren bietet also die photographische Methode ganz erhebliche Vorzüge; durch die rasche Übersicht der Resultate ist sie der Ionisationsmethode völlig überlegen, bezüglich der Messungen von Intensitäten und der Empfindlichkeit auf geringe Energien kehrt sich indessen das Güteverhältnis um.

In Hinsicht auf die Technik der photographischen Methode ist zu erwähnen, daß die Kassette zweckmäßig mit einer dünnen Aluminiumfolie lichtdicht verschlossen wird. Bei sehr weicher Strahlung darf die Folie nur wenige 0,01 mm dick sein und wird wegen der Löcher am besten doppelt genommen. Die in der ärztlichen Röntgentechnik üblichen Verstärkerschirme machen scharfe Linien diffus und stören durch Absorption im Schirm oder in dem Glas der photographischen Platte.

Die Drehung des Kristalls muß mechanisch gleichförmig geschehen, was durch ein Uhrwerk nur unvollkommen erreicht wird. Sehr bewährt hat sich die vom Verf. verwendete doppelte Schneckenübertragung auf die Achse eines Elektromotors. Bei Intensitätsvergleichungen im Spektrum ist darauf zu achten, daß gleichförmige Winkelgeschwindigkeit des Kristalls nicht gleichförmige Geschwindigkeit beim Durchlaufen des Spektrums bedeutet.

Die Dimensionierung der meisten Röntgenspektrometer ist ungefähr die gleiche: 12 bis 15 cm beträgt der Abstand Spalt-Achse bzw. Achse-Platte (oder Spalt der Ionisationskammer). Der Spalt wird meist 0,2 bis 0,1 mm geöffnet. Bei noch engeren Spalten besteht die Gefahr, daß die meist erhebliche Dicke der Spaltbacken (meist Blei) den Öffnungswinkel δ und damit die Intensität verkleinert.

Die Schärfe der mittels der Drehmethode, z. B. von E. Wagner[1]), erhaltenen Spektren mag man ersehen aus Fig. 4 (Tafel XI), die in 4facher Vergrößerung sowohl das kontinuierliche wie das Linien-Spektrum der L-Serie des Platins darstellt. Die Spaltweite betrug 0,12 mm. Zum Vergleich bringt Fig. 5 (Tafel XI) zwei schmale Spektralbereiche, die den darüber stehenden entsprechen, und welche mit der Methode des feststehenden Kristalls gewonnen wurden (bei Benutzung des gleichen Exemplars Steinsalz). Hier kommt (vgl. Fig. 6) das Spektrum ver-

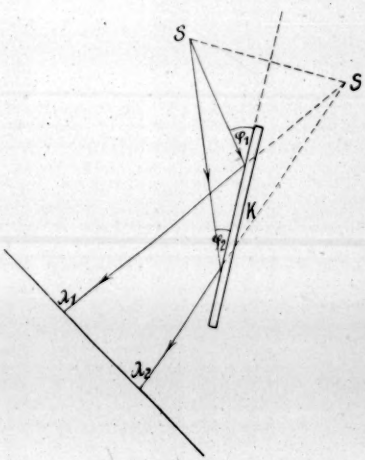

Fig. 6.

möge der im Primärbündel vorhandenen (meist recht geringen) Divergenz zustande und ist daher auf kleine spektrale Bereiche beschränkt, wenn nicht, wie bei Moseley, der Spalt sehr nahe an den Kathodenstrahlfokus auf der Antikathode herangebracht wird. Während die Spektrallinien beim unbewegten Kristall eine eben genügende Schärfe zeigen, ist das Kontinuum in eine wolkige Struktur zerfasert, die im wesentlichen ein Abbild der Kristallfehler darstellt. Denn es ist für die Wirkungsweise des feststehenden Kristalls charakteristisch, daß eine bestimmte Wellenlänge ausschließlich von ihrem ganz bestimmten sehr

1) E. Wagner, diese Zeitschr. 16, 30, 1915.

kleinen Bereich des Kristalls reflektiert wird, infolgedessen müssen sich die Fehler in diesen Bereichen in der Reflexion nach Richtung und Intensität geltend machen. Solche Fehler einigermaßen regelmäßig über die Kristallfläche angeordnet, ließen in den Versuchen H. Seemanns[1]) am feststehenden Kristall das ganze kontinuierliche Spektrum fälschlich als dichtes Linienspektrum erscheinen.

Fig. 4 (Tafel XI) zeigt, in wie unerwartet hohem Grade die Drehmethode solch grobe Fehler herausmittelt. Natürlich erfordert auch sie möglichst gute und ebene Spaltflächen. Eine Prüfung in dieser Richtung geschieht erfolgreich durch Reflexionsversuche nicht sowohl mit Licht als mit kontinuierlichen X-Strahlen selbst. Den Einfluß von Krümmungen der Spaltflächen auf den Strahlengang beim drehenden Kristall findet man bei Wagner[2]) und Seemann[3]) erörtert; er ist bedeutend nur bei Krümmungen in der Einfallsebene und bei längeren Flächen, wie solche aus Intensitätsgründen benötigt werden im kurzwelligen Gebiet und bei größeren Divergenzen im Primärbündel. Um äußerste Schärfe der Abbildungen zu erreichen, muß ein kleines ausgesucht fehlerfreies Spaltstück ausgeblendet werden. Dies bedingt einen kleinen Öffnungswinkel δ; zur Erreichung genügender Lichtstärke ist in diesem Falle die Anwendung der Antikathodenstellung in streifender Emission geboten. Übrigens verlangt äußerste Schärfe der Abbildung punktförmige Beleuchtung. Bei einer solchen sind nämlich die Spektrallinien gekrümmt; bei einer Ausdehnung des Fokus in der Spaltrichtung durchkreuzt sich also das System der in dieser Richtung verschobenen Spektrallinien und bewirkt eine (geringfügige) Unschärfe.

Einen weiteren wichtigen Grund zur Unschärfe liefert der Umstand, daß die Reflexion nicht an einer Oberflächenschicht stattfindet, sondern, als Interferenzvorgang und von einer durchdringenden Strahlung herrührend, in einem wohl meßbaren Tiefenbereich. Das reflektierte Bündel muß daher eine gewisse Breite haben, selbst wenn das einfallende merklich schmal ist. Nach Maßgabe der Absorption im Kristall ist die Intensität auf seine Breite verteilt. W. H. Bragg[4]) konnte diesen Effekt mit der Ionisationsmethode an der durchdringenden Strahlung der K-α-Linie des Rh nachweisen bei dem durchlässigen Diamant. Wagner[5]) teilte Spektralphotographien der K-α-Linien des Pd mit, deren photometrierter Schwärzungsverlauf (diffuse Verbreiterung der Linien nach der kurzwelligen Seite) diesen in II. Ordnung gesteigerten Eindringungseffekt zeigte. Die wirksame Eindringtiefe — bis zu welcher praktisch völlige Absorption statthat — ergab sich bei jener Strahlung am $Na\,Cl$ = ca. 0,1 mm. Sie läßt die Spektrallinien ungefähr doppelt so breit erscheinen. Die weicheren Pt-Linien zeigten am $NaCl$ diesen Effekt noch nicht. Diesem für die Genauigkeit spektrometrischer Messungen verhängnisvollen Umstand kann man begegnen durch sehr dünne (freilich leicht unebene) Kristallschichten oder stark absorbierende Kristalle.

H. Seemann teilte kürzlich (diese Zeitschr. **18**, 242, 1917) eine spektroskopische Anordnung („Lochkameramethode") mit, die den wichtigen Vorzug besitzt, die Linienverbreiterung infolge des reflektierenden Tiefenbereichs zu vermeiden. Dazu ist nur nötig (in der Anordnung des feststehenden Kristalls mit reflektierender Spaltungsfläche bei ausgedehnter Strahlungsquelle), den der Kristallfläche parallelen Spalt in das reflektierte Bündel zu verlegen anstatt in das einfallende Primärbündel. Der Spalt läßt dann aus der Gesamtheit der homogenen parallelen reflektierten Strahlenbündel — einschließlich der aus dem Tiefenbereich stammenden — nur ein paralleles Bündel hindurch, das seiner Spaltweite entspricht. Hierbei setzt sich das ausgeblendete Bündel aus Strahlungen zusammen, die von ein wenig verschiedenen Orten der Antikathode stammen.

Die mitgeteilten Aufnahmen des Pt-Linienspektrums bei Verwendung von durchlässigen Zuckerkristallen zeigen sehr deutlich einerseits die starke Linienverbreiterung bei der Stellung des Spaltes zwischen Quelle und Kristall; andererseits demonstrieren sie bei der Spaltanordnung zwischen Kristall und Platte die gelungene Vermeidung jener Verbreiterung an der großen Linienschärfe.

Einige andere Methoden, Spektren zu erzeugen, sind folgende. Durch Reflexion an einem gebogenen (feststehenden) Glimmerblatt haben de Broglie und Lindemann[1]) recht scharfe Linienspektren erhalten. Die Biegung bietet gegenüber ebenen Flächen den Vorteil größerer Spektralbereiche; Glimmer als solcher spaltet leicht in vorzügliche Flächen auf. Indes verbietet seine große Gitterkonstante eine genügende Dispersion im kurzwelligen Spektrum, auch begegnet die genügend genaue Ausmessung

1) H. Seemann, diese Zeitschr. **15**, 794, 1914.
2) E. Wagner, Ann. d. Phys. **49**, 625, 1916.
3) H. Seemann, Ann. d. Phys. **51**, 391, 1916.
4) W. H. Bragg, Phil. Mag. **27**, 881, 1914.
5) E. Wagner, Ann. d. Phys. **49**, 625, 1916.

1) M. de Broglie und F. A. Lindemann, C. R. **158**, 944, 1914 und Journ. d. Phys. **4**, 265, 1914, wo ein Linienspektrum abgebildet ist. Vgl. auch H. Rohmann, diese Zeitschr. **15**, 510 u. 715, 1914.

des Spektrums Schwierigkeiten. Vor allem bleiben die prinzipiellen Mängel des unbewegten Kristalls bestehen.

Es ist eine Frage von Interesse, ob es mit biegsamem kristallinem Material möglich ist, Flächen zu belegen, die weit geöffnete homogene Strahlenbündel fokussieren[1]) und dadurch eine große Intensitätssteigerung ergeben.

Die Reflexionsbedingung $\varphi = \text{const.}$ schließt das aus. Indessen erlaubt eine zylindrische oder konische Glimmerfläche wenigstens konische Bündel zu vereinigen und damit eine hohe monochromatische Flächenhelligkeit zu erzeugen (vgl. Fig. 7). Durch die Lochblende A tritt das

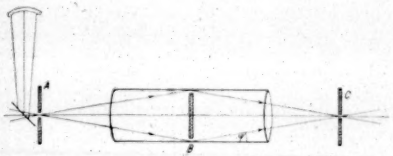

Fig. 7.

Primärbündel ein, das homogene konische Bündel wird ringsum am Glimmerrohr nach C reflektiert, wo durch eine Lochblende die intensive homogene Strahlung austritt. Die Bleischeibe B blendet jede fremde Strahlung ab. G. Gouy[2]) hat den Fall des Glimmerrohrs näher diskutiert; insbesondere die spektrale Optik längs der Achse, wo die photographische Platte aufzustellen wäre.

Auf sehr eigenartige Weise erhielt de Broglie[3]) ein Röntgenspektrum, indem er ein dünnes Platinblech mit einem schlitzförmigen Strahlenbündel durchstrahlt: Es zeigte sich hinter dem Blech das voll ausgebildete abgebeugte Spektrum der benutzten Platinantikathode. Offenbar ist dies nach de Broglie erzeugt durch die ungeordnete mikrokristallinische Struktur des Metalles; auf diese Weise finden sich immer Kristallflächen, die unter dem selektiven Winkel der einzelnen homogenen Strahlungen zum Primärstrahl stehen.

Debye und Scherrer[4]) stellten bewußt durch Zerreiben großer Kristalle in Pulver ungeordnete mikrokristallinische Körper her und konnten sogar rückwärts aus dem Interferenzbild homogener Strahlung auf die Struktur des Kristalls (Graphit und Kohle) schließen.

1) Vgl. hierzu auch die von de Broglie erwähnte Fläche einer logarithmischen Spirale. Journ. de Phys. **4**, 267, 1914.

2) G. Gouy, Ann. de Phys. **5**, 241, 1916.

3) M. de Broglie und F. A. Lindemann, Verh. d. D. phys. Ges. **16**, 198, 1914.

4) P. Debye u. P. Scherrer, Gött. Nachr. S. 1, 1916 und diese Zeitschr. **18**, 291, 1917.

Schwerlich kann diese Methode die Linienschärfe des Drehkristalls erreichen, dafür liefert sie uns in erstaunlicher Einfachheit Röntgenstrahlspektren, die wie de Broglie und Lindemann sagen, bei jedem Absorptionsversuch der Röntgenstrahlen in einem Metallfilm hätten gefunden werden können.

H. Seemann[1]) beschreibt eine spektroskopische Anordnung „ohne Spalt". Hier wird eine scharfe Metallschneide auf (oder bis dicht auf) die Kristalloberfläche gesetzt und mit einer ausgedehnten Strahlenquelle (großer Kathodenstrahlfokus) beleuchtet. Der Spalt liegt hier zwischen Schneide und der größten praktisch in Betracht kommenden Eindringtiefe der Strahlung in den Kristall. Diese Anwendung des feststehenden Kristalls besitzt den Vorzug, daß nur ein sehr kleiner Kristallbereich für die Reflexion aller λ in Frage kommt. Daher vermeidet sie weitgehend die oben betonten Mängel.

E. Rutherford[2]) hat mit Erfolg für den Fall sehr kurzer Wellenlängen (γ-Strahlung) folgende Anordnung benutzt, die er als „Transmissionsmethode" bezeichnet. K ist ein dünner $NaCl$-Kristall (vgl. Fig. 8), der beim Versuch feststeht bleibt. A, das schmale Emanationsrohr, entsendet ein weit geöffnetes Strahlenbündel, aus dem eine homogene Welle an den inneren Würfelebenen (gestrichelt) bei B nach E reflektiert werde.

Eine photographische Platte P_1 zeigt die Spektrallinien bei E und ferner Absorptionslinien bei A', die durch den Intensitätsverlust im Strahl ABA' bei der Reflexion bewirkt werden. Wird eine Spaltblende so aufgestellt (vgl. Fig. 8), daß der Spalt S alle reflektierten Strahlen und nur diese hindurchläßt, so erscheinen auf einer Platte in P_2 nur die Spektrallinien ungestört von Absorptionslinien.

Die Breite b von (streng homogenen) Spektrallinien ergibt sich in der Transmissionsanordnung zu

$$b = 2d \cdot \operatorname{tg}\varphi ,$$

wo d die Dicke des Kristalls, φ der Winkel zwischen reflektierender Ebene und Strahl sei. b ist also merklich breit außer bei sehr kleinem φ. Die reflektierte Intensität ist gleichförmig über b verteilt, da die Absorptionswege aller Strahlen des reflektierten Bündels im Kristall gleich sind.

Einen Vorzug bedeutet die Reflexion an den inneren unverletzten Kristallflächen gegenüber der Verwendung der äußeren Spaltflächen,

1) H. Seemann, Ann. d. Phys. **49**, 470, 1916; **51**, 391, 1916.

2) E. Rutherford u. da Andrade, Phil. Mag. **28**, 263, 1914.

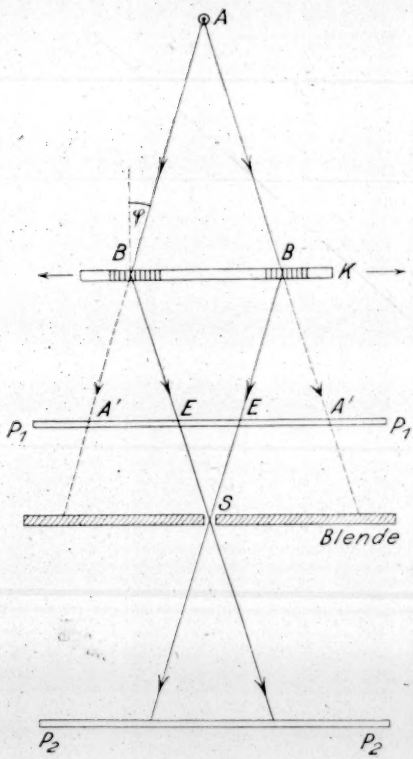

Fig. 8.

denn beim Spalten findet eine treppenartige Absplitterung und Lockerung der Kohäsion gerade des zur Reflexion dienenden Bereiches statt.

Von den Mängeln der Methoden des unbewegten Kristalls ist auch die Rutherfordsche nicht frei. Durch eine hin- und hergehende Parallelschiebung des Kristalls längs der gezeichneten Pfeile wären diese Mängel zu heben.

Die Bestimmung der Wellenlänge λ im absoluten Maß erfordert die Kenntnis der Gitterkonstante d. Da diese durch direkte Messung nicht gewonnen werden kann, so ist man auf die Braggschen Schlüsse[1]) angewiesen, die diese Autoren mit überzeugender Beweiskraft über den Bau der Kristalle zogen aus ihren bekannten Reflexionsversuchen an verschiedenen ausgezeichneten Netzebenen desselben Kristalls und in aufeinanderfolgenden Interferenzordnungen der angewandten homogenen X-Strahlung. d folgt dann in einfacher Weise aus dem Molekulargewicht M der den Kristall aufbauenden Elemente, der Kristalldichte σ und der Avogadroschen Zahl A, d. i. die Anzahl der Moleküle im Gramm-Mol.

Aus den Untersuchungen W. L. Braggs folgt, daß z. B. Steinsalz aus kleinsten Würfeln aufgebaut ist, in deren Ecken abwechselnd ein Na- und ein Cl-Atom liegt. Ist d die Länge der Würfelkante (= Gitterkonstante für Würfelebene), so haben wir:

$$A \cdot \sigma \cdot d^3 = \frac{M}{2}.$$

Setzen wir mit Moseley

$$\sigma = 2{,}167; \quad M = 23{,}00 + 35{,}46 = 58{,}46; \quad A = 6{,}05 \cdot 10^{23},$$

so folgt:

$$d = 2{,}814 \cdot 10^{-8} \text{ cm}.$$

Die Unsicherheit der Avogadroschen Zahl von einigen Prozenten setzt die Grenze für die Genauigkeit der absoluten Größe der Gitterkonstanten bzw. der Wellenlängen von ca. 1 Proz.

Da die Meßgenauigkeit der Reflexionswinkel φ, d. h. die relative Genauigkeit der Wellenlängenmessung erheblich weiter geht, so wäre es sehr unzweckmäßig, die absoluten Werte der Wellenlängen bzw. Gitterkonstanten stets neuen verbesserten Werten der drei Größen σ, M und vor allem A anzupassen. Es wurde darum vom Verf. der bisher von allen Autoren von selbst befolgte Vorschlag gemacht: im Interesse der Einheitlichkeit und Vergleichbarkeit aller Wellenlängen den Moseleyschen Wert $2{,}814 \cdot 10^{-8}$ cm als Gitterkonstante d der Würfelebene von Steinsalz festzuhalten und auf ihn alle λ- bzw. d-Werte der anderen Kristalle zu beziehen. — Voraussetzung hierfür ist die Übereinstimmung der Gitterkonstante für verschiedene Exemplare desselben Kristalls. Eine experimentelle Prüfung dieser Frage durch E. Wagner[1]) an Steinsalz sehr verschiedenen Ursprungs (darunter ein grob trübes Stück) ergab Übereinstimmung innerhalb der Meßfehler (ca. 1 pro Mille). Zur relativen Messung der Gitterkonstanten d_1 und d_2 zweier Kristalle benutzt man die Reflexion derselben homogenen Strahlung (in unserem Falle die $K\alpha$-Linien von Pd). Es gilt dann die Gleichung: $\frac{d_1}{d_2} = \frac{\sin \varphi_2}{\sin \varphi_1}$. Die ge-

1) Vgl. dazu: W. L. Bragg, Jahrb. d. Radioakt. **11**, 346, 1914.

1) E. Wagner, Ann. d. Phys. **49**, 646, 1916.

naue Messung von φ bedingte bei der hier angewandten photographischen Methode (mittels Drehkristalls) exakte Abstandsmessung der empfindlichen Schicht von der Drehachse; genaue Justierung von Kristall und Platte zum Strahlengang; Verwendung ebener Spiegelglasplatten anstatt der gekrümmten gewöhnlichen photographischen Platten.

Besondere Erörterung verlangt die unvermeidbare Abweichung f der reflektierenden Kristallfläche von der Drehachse, da diese einen Fehler in der Linienposition von annähernd $2f$ bewirkt. l. c. wird eine einwandfreie Art seiner Eliminierung angegeben durch Verwendung von zwei Reflexionsordnungen, und zwar symmetrisch auf beiden Seiten zum Primärstrahl. Die Grenze in der Meßgenauigkeit von φ setzte die asymmetrische Breite der Pd-Linien, infolge der Tiefe der reflektierenden Schicht und die Krümmung der Spaltfläche; sie betrug bestenfalls ca. $\frac{1}{2000}$ von φ ($\varphi = 6^0$). Aus diesen Messungen ergab sich:

$$\text{I.} \qquad \frac{d_{KCl}}{d_{NaCl}} = 1{,}1144$$

in guter Übereinstimmung mit dem Wert 1,1162, der aus den Strukturen folgt.

Als Wellenlängen für Pd folgte:

$$\text{II.} \qquad \begin{aligned} \lambda_\alpha &= 0{,}5872 \text{ Å} \\ \lambda_\alpha' &= 0{,}5828 \text{ Å}. \end{aligned}$$

Mit der Ionisationsmethode bestimmte W. H. Bragg den Winkel φ der Rhodium-K-α-Strahlung an der Diamantfläche 111 möglichst genau auf folgende Weise.

Bei eng geöffnetem Primärbündel (ca. einige Bogenminuten, Antikathodenstellung in streifender Emission) wird die Reflexionsintensität gemessen, die durch den weit geöffneten Spalt der feststehenden Ionisationskammer dringt, wenn der Kristall in kleinen Schritten (12 Schritte durch etwa 5 Bogenminuten) durch das ganze Reflexionsgebiet der K-α-Linie gedreht wird.

Der Kristallort für die maximale Intensität wurde so in I. und III. Ordnung bestimmt; die Mittelwerte der Orte stimmten auf 1′ überein. Aus der Differenz der Mittelwerte der zwei Ordnungen folgt dann rechnerisch, unbeeinflußt von Abweichungen der reflektierenden Fläche von der Drehachse,

$$\varphi = 8^0\,35{,}2'$$

und

$$\lambda_{Rh;\alpha} = 0{,}614 \cdot 10^{-8} \text{ cm}.$$

Vergleicht man die bis jetzt im Röntgengebiet erreichte Trennbarkeit zweier benachbarter Spektrallinien mit der in der Optik, so kann man sagen, daß sie die Auflösung der beiden D-Linien im Natriumspektrum nicht viel übertrifft.

Wir geben hier noch eine kleine Zusammenstellung von Werten der Gitterkonstanten einiger häufiger gebrauchter Kristalle (bei Zimmertemperatur[1]).

Tabelle I.

Kristall	Ebene	Gitterkonstante $\times 10^8$ cm
Na Cl	100	2,814
K Cl	100	3,136
Diamant	111	2,07
Kalkspat	100	3,04
Gips	Spaltfläche	7,621
Ferrozyankalium		8,454
Glimmer		ca. 10

Für den Fortschritt in der Genauigkeit der Wellenlängenmessungen wäre es sehr wünschenswert, wenn noch mehrere Wellenlängen, z. B. von *Cu, Ag, Pt* möglichst genau bestimmt würden, um bei der photographischen Methode als Bezugslinien auf der gleichen Platte zu dienen.

Strahlungsquellen und Instrumentarium.

Um mit dem Drehkristall in genügend kurzer Zeit über einen Bereich $\Delta\varphi$ von ca. 3^0—10^0 ausgedehnte Spektren auf der Platte zu erhalten, benutzt man am besten die mächtigen störungsfrei arbeitenden Hochspannungsgleichrichter-Anlagen in Verbindung mit den t[illegible]ischen luft- oder wassergekühlten Röntgenröhren, z. B. von Gundelach oder Müller. Sehr praktisch ist das Rohr von Siegbahn (Hersteller Gundelach, Gehlberg) mit der wassergekühlten mittels Schliff auswechselbaren Antikathode, auf der auch leicht die zu untersuchenden Substanzen anzubringen sind, z. B. Pulver einfach durch Einreiben in Ritzen der kupfernen Antikathode. Bei exakten Vergleichsaufnahmen ist die Anordnung Moseleys empfehlenswert, bei der mehrere Substanzen auf einem im Vakuum zu betätigenden Schlitten nebeneinander angebracht sind, der sie an den Ort des Kathodenstrahlfokus zu schieben erlaubt. Den Spalt in die Röntgenröhre nahe zum Fokus zu verlegen, bringt großen Gewinn an Lichtstärke, verlangt aber natürlich feste Aufstellung der Röhre gegen das Spektrometer.

Das „Sekundärstrahlungsverfahren" benutzt als Strahlungsquelle die Eigenstrahlung der Elemente in Luft, die durch primäre Röntgenstrahlen angeregt wird. de Broglie[2]), Gla-

1) Die Änderung der Gitterkonstante mit der Temperatur hat W. H. Bragg, Phil. Mag. **27**, 881, 1914 deutlich beobachten können.

2) M. de Broglie, C. R. **158**, 1493, 1785, 1914.

golew[1]) und Siegbahn[2]) haben sich dieser Methode mit Erfolg bedient. Sie leidet unter dem Mangel an Intensität, besticht allerdings durch ihre Anwendbarkeit auf Substanzen und chemische Verbindungen, die im Vakuum und durch die intensive Kathodenstrahlung Zersetzung erleiden. —

Bei der Untersuchung weicher Strahlung verwendet man die durchlässigen „Lindemann"-Glasfenster (Lithiumglas) oder Aluminiumfenster. Da extrem weiche Strahlen bereits in Luft erheblich absorbiert werden, so erfordert deren Erforschung den Vakuumspektrographen. Moseley[3]) war der erste Erbauer eines solchen. Er ordnete Plattenhalter und Kristallhalter drehbar (auf Stahlkugeln in Kreisrinnen laufend) in einem zylindrischen Eisenkasten an, der gegen das Hochvakuum der Röntgenröhre durch ein Fenster dünnster Goldschlägerhaut abgedichtet war. Da Moseley nicht mit kontinuierlicher Kristalldrehung arbeitete, wurden Kristall und Platte vor jedem Versuch in die passende Stellung gebracht. Ein sehr vollkommener Vakuumspektrograph stammt von M. Siegbahn[4]). Vor allem erlaubt dieser durch einen abgedichteten Drehzapfen eine stetige Hin- und Herdrehung des Kristalls auszuführen. Zwei konaxiale Konusse führen durch den Boden eines zylindrischen Messingkastens; der eine trägt im Innern den Arm des Plattenhalters, der andere dient zur Drehung des Kristalls. Beider Drehung und Stellung ist auf außen angebrachten Teilungen abzulesen. Hochvakuum und Spektrograph kommunizieren nur durch den 0,1 mm breiten Spalt, den dünnes rotes Papier lichtdicht verschließt, zugleich den geringen Druckunterschied zwischen Hochvakuum und Spektrographenvakuum aufrecht erhaltend. Zur Untersuchung kurzer Wellen wird meistens das intensiv reflektierende Steinsalz verwendet, obwohl die Würfelebene häufig uneben aufspaltet; für lange Wellen eignet sich Gips und Glimmer.

Einen Prüfstein für scharfe Abbildung bildet z. B. die Trennbarkeit der starken Kupferlinien α und α' der K-Serie.

Experimentelle Ergebnisse.

Die Linienspektren der Elemente.

Mit ihrem Spektrometer stellten zuerst W. H. und W. L. Bragg[5]) die Existenz scharfer Intensitätsmaxima der Ionisation fest bei bestimmten Reflexionswinkeln φ auf kontinuierlichem Untergrund. Diese Maxima wiederholten sich bei Winkeln in zweiter, dritter ... (n ter) Ordnung mit verminderter Stärke in exakter Erfüllung des Gesetzes der Interferenzreflexion:

$$n \cdot \lambda = 2d \cdot \sin \varphi,$$

wobei die Härte ihrer Strahlung, an Absorption in Aluminium gemessen, gleichblieb.

Hiermit war zugleich dreierlei gezeigt: I. der Gitteraufbau der Kristalle; II. der Interferenzcharakter der Laueschen Erscheinung, d. i. der Wellencharakter der Röntgenstrahlung; III. die Existenz scharfer Frequenzen im Röntgenspektrum der Elemente. Bezüglich dieses letzteren ergab Variation im Antikathodenmaterial, daß die Spektrallinien dem betreffenden chemischen Element eigentümlich waren und, nach ihrer Härte geschlossen, die Barklasche Fluoreszenzstrahlung der weichen L-Serie bei den schweren Atomen wie Pt, die harte K-Strahlung bei den leichteren Atomen Cu, Pd, Rh darstellten. Dieser Befund wurde fast gleichzeitig durch noch verschärfte Messungen von Moseley und Darwin[1]) ebenfalls mit der sehr verfeinerten Ionisationsmethode bestätigt. Sie stellten die Gültigkeit der Reflexionsgleichung für 5 Platinlinien fest an Steinsalz, Ferrozyankalium und Gips in mehreren Ordnungen und mit einer Genauigkeit von 1 Bogenminute im Werte der Reflexionswinkel. Indem Moseley[2]) mit der rasch arbeitenden übersichtlichen photographischen Methode (feststehender Kristall, weit geöffnetes Primärbündel) die Untersuchung der Linienspektren auf möglichst alle erreichbaren Elemente (von Aluminium bis Gold) erstreckte, trat eine fundamentale Gesetzmäßigkeit in quantitativ reiner Form zutage, die in den bewunderungswürdigen Versuchen Barklas bereits sich ausgesprochen hatte. Wir erinnern kurz an letztere.

Bestrahlt man die Elemente mit Röntgenstrahlen genügender sonst variabler Härte, so bewirkt deren Absorption im Element eine sekundäre X-Strahlung, ihre charakteristische oder Fluoreszenz-Strahlung. Diese setzt sich zusammen aus zwei Arten „homogener" Strahlung (d. i. von gleicher Absorbierbarkeit in Aluminium), der harten K- und der weichen L-Strahlung. Mit wachsendem Atomgewicht wächst die Härte beider Serien gesetzmäßig im ganzen untersuchten Bereich der Elemente. Die Spektralanalyse Moseleys löste beide Strahlungen in Gruppen von scharfen Linien auf, getrennt durch ein relativ großes linienfreies Intervall, wobei die mittleren Wellen-

1) M. Glagolew, C. R. **160**, 709, 1915.
2) M. Siegbahn, Verh. d. D. phys. Ges. **17**, 469, 1915 und J. Malmer, Dissertation, Lund 1915.
3) G. J. Moseley, Phil. Mag. **27**, 705, 1914.
4) M. Siegbahn u. E. Friman, diese Zeitschr. **17**, 176, 1916; neuestes Modell, Jahrb. d. Rad. **13**, 307, 1916. E. Friman, Dissertation, Lund 1916.
5) W. H. u. W. L. Bragg, Proc. Roy. Soc. A. **88**, 428, 1913.

1) J. Moseley u. G. Darwin, Phil. Mag. **26**, 210, 1913.
2) J. Moseley, Phil. Mag. **26**, 1024, 1913 u. **27**, 703, 1914.

längen der Gruppen ungefähr im Verhältnis 1 : 7 stehen. Eine neue noch weichere Serie, die M-Serie, fand M. Siegbahn[1]) (naturgemäß bei den schwersten Atomen) auf, wobei wiederum deren mittlere Wellenlänge ca. 4 mal die der L-Serie übertrifft.

Die K-Strahlung erwies sich als die intensivste und einfachste mit nur 4 Linien: dem intensiven Dublett $\alpha\ \alpha'$, dann in abnehmender Intensität und Wellenlänge folgend die β- und γ-Linie (Fig. 16). Die äußersten Wellenlängen unterscheiden sich um nur ca. 10 Proz. und darum konnte wohl ihre mittlere Härte in den Barklaschen Absorptionsmessungen homogen erscheinen.

Die L-Strahlung erwies sich als komplexer; sie besteht aus ca. 14 Linien (Fig. 4). Ihre äußersten Wellenlängen differieren bei Palladium um 20 Proz., bei Uran um 70 Proz.

Der Vergleich der Spektra der Elemente ergab das sehr bemerkenswerte Resultat, daß das Spektrallinienbild jeder Serie in seinen feinsten Zügen: in der Anzahl der Linien, in der Intensitätsverteilung untereinander und weitgehend in ihrer spektralen Anordnung bei allen Elementen wiedergefunden wird oder, soweit sich einige Züge in geringem Grade ändern, daß diese Änderungen sich stetig von Element zu Element verfolgen lassen. Dabei wandert beim Fortschreiten von leichten zu schweren Atomen der Ort der Serienemission im Spektrum um annähernd gleiche Schritte nach der kurzwelligen Seite, wenn man von einem Element zu dem nächsten geht. Das Moseleysche Gesetz tritt aber scharf erst hervor, wenn man nicht die Atomgewichte in Beziehung zu den Frequenzen setzt, sondern die Atomart. Diese ändert sich in regelmäßiger (periodisch wiederkehrender) Weise, wenn man den Anordnungsplan des natürlichen Systems schrittweise von einem Element zum nächsten durchläuft. Numeriert man dementsprechend die Elemente, mit $H = 1$, $He = 2$, $Li = 3$ usw. beginnend, bis zum Uran $= 92$, jedes Atom durch diese seine „Ordnungszahl" N[2]) (oder „Atomzahl") bezeichnend, so lautet die Moseleysche Beziehung:

$$\sqrt{\nu} = a\,(N - b),$$

in Worten: Die Quadratwurzel aus allen zusammengehörigen Frequenzen $\left(\nu = \frac{1}{\lambda}\right)$ der Elemente stehen in linearer Abhängigkeit zu ihren Ordnungszahlen N im periodischen System.

1) M. Siegbahn, Verh. d. D. phys. Ges. **18**, 278, 1916.
2) Vgl. die von Fajans (diese Zeitschr. **16**, 467, 1915) gegebene Anordnung der Elemente.

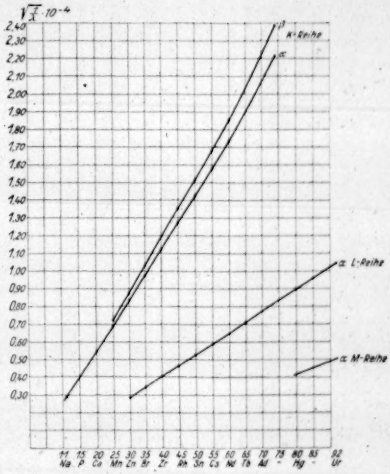

Fig. 9.

In Fig. 9 ist für die α- und β-Linien der K-Serie das Resultat der Messungen wiedergegeben; für die L- und M-Serie der Verlauf nur für die Hauptlinien α.

Moseley erhält für die stärksten (α) Linien der K- und L-Serie im Intervall $N = 13$ bis 79 folgende Konstanten:

$$\sqrt{\nu_K} = \sqrt{\tfrac{3}{4}\,\nu_\infty}\cdot(N - 1)$$

und

$$\sqrt{\nu_L} = \sqrt{\tfrac{5}{36}\,\nu_\infty}\cdot(N - 7{,}4).$$

$^3/_4$ bzw. $^5/_{36}$ haben die spektraltheoretische Bedeutung:

$$\frac{3}{4} = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2};\quad \frac{5}{36} = \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\ \text{(Balmerserie)}.$$

ν_∞ ist die Rydbergsche Fundamentalfrequenz.

Die Kurven $(\sqrt{\nu}, N)$ verlaufen nicht streng linear, sondern bei hohen Ordnungszahlen etwas konvex gegen die N-Achse; auch variiert ihr Verlauf für die einzelnen Spektrallinien innerhalb der L-Gruppe, so daß Durchkreuzungen stattfinden (vgl. Fig. 10). Stets aber liegen die $\sqrt{\nu}$-Werte homologer Reihen innerhalb der Meßgenauigkeit auf solchen glatten Kurven; woraus für die Wiedererkennung zusammengehöriger Linien im Spektrum ein großer interpolatorischer Vorteil erwächst.

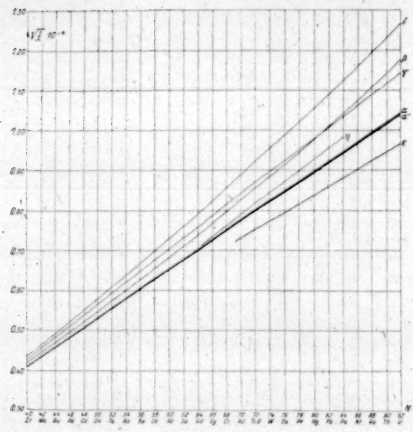

Fig. 10.

Wie die Messungen zeigen, erfüllen alle bekannten Elemente ausnahmslos die Moseleysche Beziehung, insbesondere auch die schwierig im periodischen System anzuordnenden seltenen Erden. Die Röntgenspektralmessungen ermöglichen damit unabhängig von jeder Theorie eine quantitativ sichere Ermittlung des Platzes N der Elemente im System, im Gegensatz zu den ganz individuellen optischen Spektren. Dieser Platz wird in bester Übereinstimmung mit dem gefundenen, den man auf Grund der chemischen Eigenschaften ihnen anwies und steht beim Co und Te im Gegensatz zu der Reihenfolge, den die Atomgewichte vorschreiben. Diese Folgerung konnte schon Barkla für Co ziehen.

Die Spektralmessungen ergaben weiter, daß die $\sqrt{\nu}$-Werte der bekannten Elemente auch alle möglichen Plätze in der Reihe der Ordnungszahlen von 11 bis 92 wirklich erfüllten mit Ausnahme von nur 6, für die sich findet $N = 43, 61, 72, 75, 85, 87$. Davon sind 61 und 72 seltene Erden; 43, 75 und 85 gehören der gleichen, VII. Vertikalreihe des periodischen Systems an (Homologe des Mangans). —

Während wir aus dem Obigen einerseits erkennen, daß im periodischen System für mehr als 92 Elemente kein Platz ist, dürfen wir andererseits schließen, daß auf der Erdoberfläche alle in der Natur überhaupt möglichen Atombauten (mit Ausnahme der wenigen 6) vorkommen.

Zugleich eröffnen die Spektralversuche in einfacher Weise den Weg zur Auffindung der noch unbekannten Elemente: liefert doch die erste Aufnahme, die jene fehlenden Spektrallinien am genau vorher bestimmten Ort im Spektrum aufzeigt, den bündigen Existenzbeweis. Es versteht sich hiernach von selbst, daß die Röntgenspektralanalyse überhaupt die Aufgaben der qualitativen chemischen Analyse in sehr viel entscheidenderer Weise löst als die Bunsen-Kirchhoffsche; wobei ihr allerdings die Gase und leichten Elemente unzugänglich sind. Bei Legierungen oder chemischen Verbindungen kommen stets deren Komponenten im Röntgenspektrum unverändert durch die chemische Bindung zur Geltung. Im Falle von Zersetzung, Verflüchtigung usw. der Substanz durch Kathodenstrahlen bleibt die Sekundärstrahlungs- oder die Absorptionsmethode (vgl. unten) übrig.

Moseley erschloß durch seine systematischen Untersuchungen bereits fast das ganze Gebiet der Elemente; von seinen Nachfolgern sind neben J. Malmer[1]) hauptsächlich die systematischen und präzisen Arbeiten von M. Siegbahn[2]) und seinen Mitarbeitern N. Stenström und E. Friman zu nennen, die nach der photographischen Methode und mittels des Drehkristalls arbeiteten und vorzüglich scharfe Linienspektra erhielten (vgl. die Reproduktionen in Frimans Dissertation). Besonders wertvoll sind die Untersuchungen über die seltenen Erden[3]), die von Auer v. Welsbach zur Verfügung gestellt waren; sowie die hohe Vollständigkeit, mit der das extrem langwellige Spektralgebiet mittels des Vakuumspektrographen erschlossen wurde.

Die Spektren einzelner Elemente wurden ferner von Bragg[4]), Herweg[5]), de Broglie[6]), Gorton[7]), Wagner[8]) ausgemessen. Die schwache γ-Linie in der K-Serie wurde von Bragg und Wagner aufgefunden. Die Übereinstimmung des L-Serienspektrums im einzelnen am Pt, Wo, Ta, sowie die Existenz der neuen Serienlinie l im L-Spektrum wurde vom Verf. unabhängig von den umfassenderen Messungen Siegbahns und Frimans mitgeteilt.

Die Übereinstimmung der Wellenlängenmessungen verschiedener Autoren er-

1) J. Malmer, Dissertation, Lund, 1915; auch Phil. Mag. **28**, 787, 1914.
2) Vgl. Jahrgang 1916 der Ann. d. Phys.; diese Zeitschr.; Verh. d. D. phys. Ges.
3) M. Siegbahn, diese Zeitschr, **17**, 176, 1916.
4) W. H. Bragg, Proc. Roy. Soc.
5) J. Herweg, Verh. d. D. phys. Ges. **16**, 73, 1914.
6) M. de Broglie, C. R. **158**, 623, 907, 1914.
7) W. S. Gorton, Phys. Rev. **7**, 203, 1916 (vgl. auch J. Barnes, Phil. Mag. **30**, 368, 1915).
8) E. Wagner. Ber. d. Bayr. Akad. Math.-phys.-Kl. S. 31, 1916.

reicht bereits fast die Meßfehlergrenze der Methode. Die photographisch gewonnenen λ-Werte Moseleys in seiner systematischen Arbeit sind alle um 1 Proz. größer als die Siegbahns; letzterer vermutet als Ursache einen ebenso großen Fehler in den Gitterkonstanten des von Moseley benutzten Ferrozyankaliumkristalls. Die besten Messungen differieren um ca. 1′ in der Angabe vom Reflexionswinkel am Steinsalz (vgl. folgende Tabellen).

Röntgenspektrum des Platins (*L*-Serie).

Moseley u. Darwin	Siegbahn u. Friman	Linie
13° 31′	13° 36′	α'
	13° 29′	α
11° 28′	11° 28,6′	β
11° 17′	11° 17,2′	γ
9° 47′	9° 48,0′	δ
9° 29′	9° 30,0′	

Bemerkung: Die Moseleyschen Messungen sind nach der Ionisationsmethode, die Siegbahnschen photographisch ausgeführt.

Das Dublett $\alpha\alpha'$ ist bei M. u. D. nicht getrennt.

Zum weiteren Vergleich führen wir folgende Zusammenstellung (φ am Steinsalz) bei Friman (Dissert. S. 44) an; sämtliche Werte sind hier photographisch gewonnen.

Röntgenspektrum des Wolframs (*L*-Serie).

Siegbahn u. Friman	de Broglie	Gorton	Linie
15° 15,4′	—	15° 12,6′	α'
15° 9,3′	15° 9′	15° 6′	α
13° 19,1′	—	13° 16,8′	
13° 7,3′	13° 8′	13° 6,6′	β
12° 55,3′	12° 55′	12° 52,8′	
12° 44,3′	12° 44′	12° 42′	γ
11° 13,3′	11° 14′	11° 12,6′	δ
10° 50,1′	—	10° 49,8′	

Während Moseley im Gebiet der langen Wellen der *K*-Serie bis zu $\lambda = 8{,}36$ Å beim Aluminium ($N = 13$) vordrang, erreichten Siegbahn und Friman $\lambda = 11{,}95$ Å beim *Na* ($N = 11$) im Vakuumspektrographen und als überhaupt längste Wellenlänge $\lambda = 12{,}3$ Å für die α-Linie des *Zn* ($N = 30$) in der *L*-Serie.

Es ist vorerst unmöglich in der Untersuchung der *K*-Serie noch einen Schritt weiter zu gehen, da das nächste Element *Fl* ($N = 10$) gemäß der Moseleyschen Beziehung bereits fast die doppelte Wellenlänge der vom Aluminium erwarten läßt: $\lambda = 19$ Å. Zu ihrer Darstellung sind die Gitterkonstanten der bisher gebrauchten Kristalle zu klein. Hier werden andere Methoden einsetzen, um das noch 6 Oktaven umspannende Spektralgebiet zwischen den längsten Wellenlängen der Röntgenstrahlen und der kürzesten der ultravioletten Strahlen ($\lambda = 1000$ Å) zu überbrücken und so den Anschluß zu gewinnen an das *L*-Serienspektrum des Wasserstoffs ($N = 1$), das uns in dem wohlbekannten Balmerspektrum sichtbar wiedererscheint.

Im Gebiet der kurzen Wellen der *K*-Serie erreichte Moseley die Grenze mit $\lambda = 0{,}56$ Å beim Silber ($N = 47$); Malmer drang bis $\lambda = 0{,}29$ Å vor beim Neodym ($N = 60$); de Broglie[1]), Ledoux-Lebard u. Dauvillier[2]) und Hull u. Rice[3]) konnten jüngst mit der Coolidge-Röhre (Glühkathode) durch Anwendung höchster Spannungen am *Wo* ($N = 74$) $\lambda_\alpha = 0{,}203$ Å und $\lambda_\beta = 0{,}177$ Å erzielen.

Hiermit umfaßt das Röntgen-Linienspektrum 6 Oktaven.

Bezüglich der Intensität der Serien und Linien ist folgendes zu bemerken:

Die Intensität der Emission der *K*-Serie erscheint als die größte, es folgen die *L*- und die *M*-Serie, doch liegen diskutierte Intensitätsmessungen noch nicht vor.

Bemerkenswert ist das Intensitätsverhältnis einiger Linien derselben Serie relativ zueinander. Wenn man die Reihe der Elemente nach abnehmendem N durchläuft, wird die γ-Linie im Vergleich zur β-Linie in der *K*-Serie immer schwächer[4]), um unterhalb *Ca* ($N = 20$) unmerklich zu werden. Ebenso verhält sich die β-Linie gegenüber der α-Linie. Andererseits treten bei kleinem N im *K*-Spektrum neue Doppellinien auf (α_3 α_4) (vgl. Tabelle).

Als einzig diffuse Linie wird die *l*-Linie der *L*-Serie von Wagner beschrieben, vielleicht ist sie aber ein unaufgelöstes Dublett.

Im folgenden teilen wir die Wellenlängenmessungen von Siegbahn-Stenström-Friman-Malmer mit.

Die verschiedene Bezeichnungsweise der Linien von Moseley, Siegbahn, Sommerfeld ist am Kopf angegeben; die starken Linien sind fett eingerahmt. Es ist zu wünschen, daß die an Moseley sich anschließende, den Serienzusammenhang zum Ausdruck bringende Nomenklatur Sommerfelds sich einbürgert.

1) M. de Broglie, C. R. **162**, 596, 1916.
2) Ledoux-Lebard und Dauvillier, C. R. **163**, 754, 1916.
3) W. Hull und M. Rice, Proc. Nat. Ac. **2**, 365, 1916.
4) M. Siegbahn, diese Zeitschr. **17**, 318, 1916; E. Wagner, Ber. Bayr. Ak. S. 31, 1916.

Tabelle II.

K-Reihe.

$\lambda \cdot 10^8$ cm.

Element	γ	β			α			α'	Bragg, Wagner, Sommerfeld
Nr.	β_2	β_1	α_4	$\alpha_3 \alpha_4$ (nicht trennbar)	α_3	α_1	$\alpha_1 \alpha_2$ (nicht trennbar)	α_2	Siegbahn
11 *Na*	—	—	—	—	—	—	11,951	—	
12 *Mg*	—	9,477	9,845	—	9,856	—	9,915	—	
13 *Al*	—	7,986	8,300	—	8,310	—	8,360	—	
14 *Si*	—	6,759	7,080	—	7,088	—	7,131	—	
15 *P*	—	5,808	6,122	—	6,129	—	6,168	—	
16 *S*	—	5,018	5,314	—	5,317	—	5,360	—	
17 *Cl*	—	4,394	—	4,692	—	—	4,712	—	
18 *Ar*	—	—	—	—	—	—	—	—	
19 *K*	—	3,449	—	3,724	—	3,735	—	3,738	
20 *Ca*	3,074	3,086	—	3,328	—	3,355	—	3,359	
21 *Sc*	—	2,778	—	3,011	—	3,028	—	3,052	
22 *Ti*	2,492	2,509	—	2,729	—	2,742	—	2,746	
23 *Va*	—	2,281	—	—	—	2,498	—	2,502	
24 *Cr*	2,069	2,079	—	—	—	2,284	—	2,288	
25 *Mn*	1,892	1,902	—	—	—	2,093	—	2,097	
26 *Fe*	1,736	1,748	—	—	—	1,928	—	1,932	
27 *Co*	1,602	1,613	—	—	—	1,781	—	1,785	
28 *Ni*	1,488	1,497	—	—	—	1,653	—	1,657	
29 *Cu*	1,379	1,391	—	—	—	1,539	—	1,543	
30 *Zn*	1,281	1,294	—	—	—	1,433	—	1,437	
31 *Ga*	—	—	—	—	—	—	—	—	
32 *Ge*	1,121	1,131	—	—	—	1,257	—	1,261	
33 *As*	1,038	1,052	—	—	—	1,170	—	1,174	
34 *Se*	—	0,993	—	—	—	1,104	—	1,109	
35 *Br*	0,914	0,929	—	—	—	1,035	—	1,040	
36 *Kr*	—	—	—	—	—	—	—	—	
37 *Rb*	0,813	0,825	—	—	—	0,922	—	0,926	
38 *Sr*	0,767	0,779	—	—	—	0,871	—	0,876	
39 *Y*	0,733	0,746	—	—	—	0,835	—	0,840	
40 *Zr*	—	0,705	—	—	—	0,788	—	0,793	
41 *Nb*	0,657	0,669	—	—	—	0,749	—	0,754	
42 *Mo*	—	0,633	—	—	—	0,710	—	0,714	
43 —	—	—	—	—	—	—	—	—	
44 *Ru*	—	0,574	—	—	—	0,645	—	—	
45 *Rh*	0,537	0,547	—	—	—	0,615	—	0,619	
46 *Pd*	—	0,521	—	—	—	0,586	—	0,590	
47 *Ag*	0,491	0,501	—	—	—	0,562	—	0,567	
48 *Cd*	—	0,479	—	—	—	0,538	—	0,543	
49 *In*	0,440	0,453	—	—	—	0,510	—	0,515	
50 *Sn*	—	0,432	—	—	—	0,487	—	0,490	
51 *Sb*	0,408	0,416	—	—	—	0,468	—	0,472	
52 *Te*	—	0,404	—	—	—	0,456	—	—	
53 *J*	—	0,388	—	—	—	0,437	—	—	
54 *X*	—	—	—	—	—	—	—	—	
55 *Cs*	—	0,352	—	—	—	0,398	—	0,402	
56 *Ba*	—	0,343	—	—	—	0,388	—	0,393	
57 *La*	—	0,329	—	—	—	0,372	—	0,376	
58 *Ce*	—	0,314	—	—	—	0,355	—	0,360	
59 *Pr*	—	0,301	—	—	—	0,342	—	0,347	
60 *Nd*	—	0,292	—	—	—	0,330	—	0,335	

Tabelle III.

L-Reihe.

$\lambda \cdot 10^8$ cm.

			α				β	γ	φ						Moseley
Element	ε	α'	α		η	ν	β	γ	φ	ζ	δ	ϑ	χ	ψ	Sommerfeld
	l	α_2	α_1	α_3	η	β_4	β_1	β_2	β_3	β_5	γ_1	γ_2	γ_3	γ_4	Sieghahn
39 *Zu*	—	—	12,346	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	
41 *As*	—	—	9,701	—	—	—	9,449	—	—	—	—	—	—	—	
35 *Br*	—	—	8,391	8,360	—	—	8,141	—	—	—	—	—	—	—	
37 *Rb*	—	—	7,335	7,305	—	—	7,091	—	—	—	—	—	—	—	
38 *Sr*	—	—	6,879	—	—	—	6,639	—	—	—	—	—	—	—	
39 *Y*	—	—	6,464	6,440	—	—	6,227	—	—	—	—	—	—	—	
40 *Zr*	—	—	6,083	6,057	—	—	5,851	—	—	—	5,386	—	—	—	
41 *Nb*	—	5,731	5,724	5,709	—	—	5,493	5,317	—	—	—	—	—	—	
42 *Mo*	—	5,410	5,403	5,381	—	—	5,175	—	—	—	—	—	—	—	
44 *Ru*	—	4,853	4,845	4,823	—	—	4,630	—	—	—	—	—	—	—	
45 *Rh*	—	—	4,596	4,577	—	—	4,372	—	—	—	—	—	—	—	
46 *Pd*	—	4,374	4,365	4,352	—	4,071	4,144	3,904	4,030	—	3,720	3,597		—	
47 *Ag*	—	4,155	4,146	4,133	—	3,861	3,928	3,698	3,823	—	3,515	—	—	—	
48 *Cd*	—	3,959	3,949	—	—	3,676	3,733	3,514	3,639	—	3,331	—	—	—	
49 *In*	—	3,774	3,766	—	—	—	3,550	3,354	—	—	3,100	—	—	—	
50 *Sn*	—	3,604	3,594	—	—	3,337	3,381	3,172	3,300	—	2,999	2,903	2,889	2,831	
51 *Sb*	—	3,443	3,434	—	—	3,184	3,222	3,021	3,149	—	2,849	2,782		—	
52 *Te*	—	3,299	3,290	—	—	3,044	3,074	2,881	3,007	—	2,712	—	—	—	
53 *J*	—	3,155	3,146	—	—	2,911	2,934	2,750	2,873	—	2,583	—	—	—	
55 *Cs*	—	2,899	2,891	—	—	2,668	2,684	2,514	2,629	—	2,350	2,234		—	
56 *Ba*	—	2,786	2,776	—	—	2,558	2,569	2,407	2,520	—	2,245	—	—	—	
57 *La*	—	2,674	2,665	—	—	2,453	2,461	2,307	2,414	—	2,146	—	—	—	
58 *Ce*	—	2,573	2,563	—	—	2,357	2,359	2,212	2,307	—	2,052	2,003		—	
59 *Pr*	—	2,472	2,462	—	—	—	2,259	2,120	2,217	—	1,958	1,937	1,933	—	
60 *Nd*	—	2,379	2,369	—	—	2,167	2,167	2,030	2,128	—	1,875	1,803	1,775	—	
62 *Sa*	—	2,210	2,200	—	—	—	2,000	1,884	1,965	—	1,725	1,659		—	
63 *Eu*	—	2,131	2,121	—	—	1,923	1,918	1,810	1,888	—	1,662	1,599	1,590	—	
64 *Gd*	—	2,054	2,043	—	—	1,851	1,844	1,744	1,811	—	1,597	(1,562)	(1,558)	—	
65 *Tb*	—	1,983	1,973	—	1,935	1,784	1,775	1,682	1,745	1,659	1,531	1,477	1,470	1,437	
66 *Dy*	—	1,916	1,907	—	—	1,721	1,709	1,622	1,685	—	1,470	1,422	1,418	—	
67 *Ho*	—	1,854	1,843	—	—	1,657	1,646	1,568	1,620	—	1,415	1,369	1,365	—	
68 *Er*	—	1,794	1,783	—	1,725	1,599	1,586	1,514	1,560	—	1,367	1,323	1,316	—	
70 *Ad*	1,892	1,681	1,670	—	1,618	1,490	1,474	1,414	1,451	1,422	1,267	1,228	1,223	—	
71 *Cp*	1,834	1,620	1,610	—	—	1,437	1,421	1,368	1,399	—	1,224	1,188	1,183	—	
73 *Ta*	—	1,528	1,518	—	1,435	1,343	1,323	1,280	1,303	—	1,135	1,101	1,097	—	
74 *W*	1,672	1,481	1,471	—	—	1,296	1,278	1,241	1,258	—	1,095	1,064	1,058	—	
76 *Os*	—	1,398	1,388	—	—	1,414	1,194	1,167	1,176	—	1,021	—	—	—	
77 *Ir*	1,540	1,360	1,350	—	—	1,176	1,154	1,133	1,138	1,101	0,989	0,962	0,956	0,917	
78 *Pt*	1,490	1,323	1,313	—	1,242	1,142	1,120	1,101	1,098	1,072	0,958	0,933	0,929	0,900	
79 *Au*	1,457	1,283	1,271	—	1,197	1,102	1,080	1,065	1,059	1,035	0,922	0,898	0,894	0,869	
80 *Hg*	—	1,251	1,240	—	—	—	1,049	1,042	—	—	0,896	—	—	—	
81 *Tl*	1,385	1,215	1,205	—	1,124	1,036	1,012	1,000	0,998	0,977	0,864	0,844	0,840	0,808	
82 *Pb*	1,348	1,186	1,175	—	1,091	1,008	0,983	0,983	0,968	—	0,842	0,820	0,816	0,792	
83 *Bi*	1,317	1,153	1,144	—	1,059	0,977	0,950	0,954	0,937	0,923	0,810	0,794	0,790	0,762	
84 *Po*	—	—	1,109	—	—	—	0,920	—	—	—	—	—	—	—	
88 *Ra*	—	—	1,010	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	
90 *Th*	1,117	0,969	0,957	—	—	—	0,776	0,797	0,758	—	0,654	0,635		—	
92 *U*	1,066	0,922	0,911	—	—	—	0,720	0,756	0,710	—	0,615	0,596		—	

Tabelle IV.

M-Reihe.

$\lambda \cdot 10^8$ cm.

	α	β	γ_1	γ_2	δ_1	δ_2	ε
79 *Au*	5,838	5,623	5,384	5,284	5,146	5,102	—
81 *Tl*	5,479	5,250	—	—	—	4,826	4,735
82 *Pb*	5,303	5,095	4,910	—	—	4,695	—
83 *Bi*	5,117	4,903	4,726	—	4,561	4,532	4,456
90 *Th*	4,139	3,941	3,812	3,678	—	—	—
92 *U*	3,905	3,715	—	3,480	3,363	3,324	—

(Fortsetzung folgt.)

BESPRECHUNGEN.

St. Meyer u. E. v. Schweidler, Radioaktivität. (Naturwissenschaft u. Technik in Lehre u. Forschung.) gr. 8°. XI u. 542 Seiten, m. 87 Abbildungen im Text. Leipzig u. Berlin, B. G. Teubner. 1916. M. 22.50, geb. M. 26.50.

Die Radioaktivität, deren Entdeckung nunmehr 20 Jahre zurückliegt, hat sich in dieser kurzen Zeit zu einem so umfangreichen und vielgegliederten Grenzgebiet zwischen Chemie und Physik entwickelt, daß eine Einführung in die reichhaltige Literatur unentbehrlich geworden ist. Nun besitzen wir zwar die ausgezeichneten Lehrbücher von Frau Curie (1911) und E. Rutherford (1913, (auch in brauchbaren Übersetzungen), die in dieser Hinsicht die besten Dienste leisten können. An einem ursprünglich deutschen Werke der Art und einem solchen, das zugleich bis auf die neueste Zeit durchgeführt ist, hat es aber bisher gefehlt.

Es ist den beiden Verfassern, die bekanntlich selbst wertvolle Beiträge zur Kenntnis der Radioaktivität geliefert haben, gelungen, den weitschichtigen Stoff auf 541 Seiten so zusammenzudrängen, daß die nach jetziger Auffassung wichtigsten Ergebnisse zu einer einheitlichen Darstellung verarbeitet sind; dabei ist die Gesamtheit der reichhaltigen Literatur in denjenigen Verzeichnissen vollständig aufgeführt, die jedem Abschnitt besonders beigegeben sind. Diese Zusammendrängung ist wesentlich dadurch ermöglicht worden, daß die durch die Erfahrung in jeder Hinsicht bestätigte Rutherfordsche Zerfallstheorie von vornherein zugrunde gelegt wird. Im Vordergrunde des theoretischen Interesses stehen die Ausführungen über die Stellung der Radioelemente zum periodischen System (die Lehre von den Isotopen) und die Frage nach der Beschaffenheit des Atoms. Die Praxis der radioaktiven Untersuchungen ist in dem Kapitel über die Meßverfahren ausführlich nach dem neuesten Stande der Methodik dargestellt. Wir besitzen noch kein Buch, das uns in so mustergültiger Weise die radioaktiven Maße und Meßverfahren (zum Teil Originalverfahren des Wiener Radiologischen Instituts) klarlegt. Die Aufzählung der Wirkungen der radioaktiven Strahlung und die Kapitel über die radioaktiven Substanzen selbst und ihren Zusammenhang untereinander sind überaus reichhaltig. Der letzte Abschnitt gibt einen klaren Überblick über die Beziehungen der Radioaktivität zur Geophysik. Auf noch zu lösende Aufgaben weist uns das Kapitel über kosmische Radioaktivität hin, in dem das Rätsel der Heßschen durchdringenden Strahlung behandelt wird.

Alle, die mit radioaktiven Untersuchungen beschäftigt sind, ob Physiker, Chemiker oder Naturwissenschaftler, sie werden den Verfassern für die große Mühe dankbar sein, mit der sie sich der kritischen Sichtung und übersichtlichen Ordnung der einschlägigen Arbeiten unterzogen haben.

Karl Bergwitz.

Tagesereignisse.

Die **deutsche Hochschule in Brünn** soll durch die Einrichtung eines elektrotechnischen und chemischen Instituts sowie einer Material-Prüfungsstelle bedeutend erweitert werden.

Personalien.

(Die Herausgeber bitten die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Ernannt: Der Privatdozent für Chemie, Nahrungs- und Genußmittel an der Universität Frankfurt a. M. Dr. M. Tillmans zum a. o. Professor an derselben Hochschule.

Ehrung: Geheimrat Prof. Dr. W. Nernst in Berlin zum stimmberechtigten Ritter des Ordens Pour le mérite für Wissenschaft und Künste.

Berufen: Der Oberlehrer am Mommsen-Gymnasium in Charlottenburg Professor Dr. Hans Beck zum a. o. Professor der Mathematik an der Universität Bonn.

Gestorben: Der frühere ord. Professor der Chemie an der Universität München Wirkl. Geh. Rat Dr. Adolf v. Baeyer, der Professor der Chemie an der Universität Würzburg Geh. Regierungsrat Dr. Eduard Buchner infolge einer im Felde erhaltenen schweren Verwundung, der Professor der Chemie an der Ecole des Mines in Mons H. van Laer.

Angebote.

Für das **Physikalische Institut der Technischen Hochschule Berlin** wird als **Assistent** ein

Physiker

mit abgeschlossener Hochschulbildung gesucht. Einsendung von Gesuchen nebst Lebenslauf und Zeugnisabschriften erbeten an

Geh. Regierungsrat Prof. Dr. **L. Grunmach,**
Charlottenburg, Berlinerstraße 171.

Gesuche.

Physiker, Dr., früher Universitätsassistent, jetzt in der Technik als wissenschaftlicher Mitarbeiter, möchte

als Nebenbeschäftigung wissenschaftliche Arbeiten,

auch mathematisch-technische Berechnungen, übernehmen. Zuschriften erbeten unter **S. H. 501** an den Verlag der Physikalischen Zeitschrift (S. Hirzel) Leipzig, Königstr. 2.

Für die Schriftleitung verantwortlich Geh. Regierungsrat Prof. Dr. H. Th. Simon in Göttingen. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.

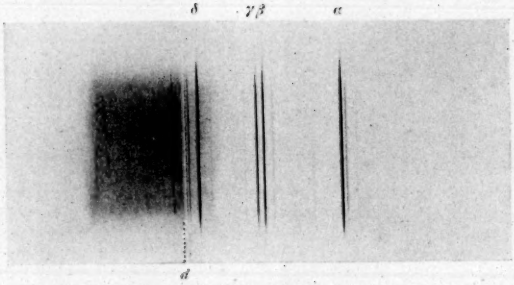

Fig. 4. (Drehender Kristall.)
L-Serie des Platins.

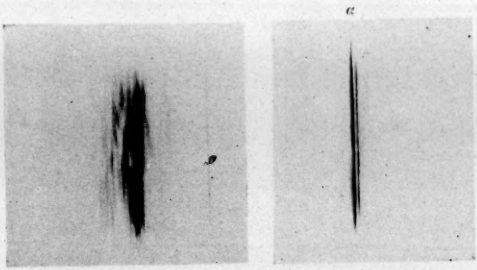

Fig. 5. (Stehender Kristall.)